Dinámica

MATEMÁTICA

GUÍA PARA EL DOCENTE

Libro versión para el docente y organización de los contenidos

puerto de palos

Índice de la guía para el docente

Capítulo 1: NÚMEROS ENTEROS

1. Números naturales. Propiedad distributiva. ... 5
2. Operaciones combinadas. ... 7
3. Divisibilidad. ... 11

Integración 1-2-3 ... 13

4. Números enteros. Orden y representación. ... 15
5. Adición y sustracción. Supresión de paréntesis y sumas algebraicas. 19
6. Multiplicación y división. ... 23
7. Operaciones combinadas con números enteros. ... 25

Integración 4-5-6-7 ... 29

8. Potenciación y sus propiedades. ... 31
9. Radicación y sus propiedades. ... 33
10. Operaciones combinadas con potencias y raíces. ... 35

Integración final ... 39

Capítulo 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES EN Z

11. Lenguaje simbólico. Regularidades. ... 41
12. Expresiones algebraicas. ... 45
13. Cuadrado y cubo del binomio. ... 47
14. Ecuaciones. ... 49

Integración 11-12-13-14 ... 53

15. Ecuaciones con potenciación y radicación. ... 55
16. Problemas con ecuaciones. ... 57
17. Inecuaciones. ... 61

Integración final ... 63

Capítulo 3: NÚMEROS RACIONALES

18. Los números racionales. ... 65
19. Aproximación. Notación científica. ... 71

Integración 18-19 ... 73

20. Adición y sustracción. ... 75
21. Multiplicación y división. ... 79
22. Operaciones combinadas I. ... 83
23. Potenciación y radicación. Propiedades. ... 87
24. Operaciones combinadas II. ... 91

Integración 20-21-22-23-24 ... 93

25. Ecuaciones. ... 95
26. Problemas con ecuaciones. ... 99

Integración final ... 101

Capítulo 4: FUNCIONES

27. Representaciones en el plano. ... 103
28. Funciones: tablas y gráficos. ... 109

Integración 27-28 ... 113

29. Función lineal. ... 115
30. Función de proporcionalidad directa. ... 119
31. Función de proporcionalidad inversa. ... 121

Integración final ... 123

Capítulo 5: RECTAS Y ÁNGULOS

32. Elementos fundamentales de la geometría. Circunferencia y círculo. ... 125
33. Posiciones relativas de dos rectas. Mediatriz. ... 127
34. Ángulos. Sistema sexagesimal. ... 131
35. Ángulos congruentes. Bisectriz. ... 135

Integración 32-33-34-35 ... 137

36. Clasificación de ángulos. ... 139
37. Ángulos determinados por dos rectas y una transversal. ... 143

Integración final ... 147

Capítulo 6: FIGURAS PLANAS

38. Triángulos. ... 149
39. Propiedades de los triángulos. ... 151
40. Puntos notables del triángulo. ... 153
41. Criterios de congruencia. ... 155
42. Construcción de triángulos. ... 159
43. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras. ... 161

Integración 38-39-40-41-42-43 ... 165

44. Paralelogramos. Construcciones. ... 167
45. Trapecios y romboides. ... 171
46. Perímetro y área de figuras planas. ... 173

Integración final ... 177

Capítulo 7: CUERPOS

47. Clasificación de los cuerpos. ... 179
48. Áreas lateral y total de cuerpos. ... 181

Integración 47-48 ... 185

49. Volumen de los cuerpos. ... 187
50. Unidades de capacidad y de masa. ... 191

Integración final ... 193

Capítulo 8: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

51. Población y muestra. Organización de la información. ... 195
52. Promedio, moda y mediana. ... 197
53. Gráficos. ... 199

Integración 51-52-53 ... 201

54. Permutaciones. ... 203
55. Probabilidad. ... 205

Integración final ... 207

ORGANIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS

NAP ... 209

Provincia de Buenos Aires ... 212

CABA ... 215

1 Números enteros

1. Números naturales. Propiedad distributiva

▶ SABERES DINÁMICOS

La **multiplicación** es **distributiva** con respecto a la adición (suma) y a la sustracción (resta).

$(3 + 4) . 4 = 3 . 4 + 4 . 4 = 12 + 16 = 28$

$3 . (12 + 3) = 3 . 12 + 3 . 3 = 36 + 9 = 45$

$(15 - 6) . 5 = 15 . 5 - 6 . 5 = 75 - 30 = 45$

$6 . (8 - 3) = 6 . 8 - 6 . 3 = 48 - 18 = 30$

El siguiente problema se puede resolver con un cálculo en el que se puede aplicar la propiedad distributiva.

Julián compró cuatro chocolates y cuatro chupetines. Si cada chocolate cuesta $45 y cada chupetín, $20, ¿cuánto gastó en total?

4 . ($45 + $20) = 4 . $45 + 4 . $20 = $180 + $80 = $260 *Julián gastó $260 en total.*

La **división** es **distributiva** con respecto a la adición y a la sustracción solo si la adición o sustracción ocupan la posición del dividendo.

$(24 + 8) : 4 = 24 : 4 + 8 : 4 = 6 + 2 = 8$

$(15 - 6) : 3 = 15 : 3 - 6 : 3 = 5 - 2 = 3$

dividendo → 15 : 5 = 3 ← cociente
↑
divisor

La **potenciación** es **distributiva** con respecto a la multiplicación y a la división.

$(5 . 4)^2 = 5^2 . 4^2 = 25 . 16 = 400$ $(12 : 3)^2 = 12^2 : 3^2 = 144 : 9 = 16$

La **radicación** es **distributiva** con respecto a la multiplicación y a la división.

$\sqrt{25 . 9} = \sqrt{25} . \sqrt{9} = 5 . 3 = 15$ $\sqrt{16 : 4} = \sqrt{16} : \sqrt{4} = 4 : 2 = 2$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/propradi* para saber más sobre la propiedad distributiva en la radicación.

* Enlace acortado de https://youtu.be/vR__bMTUiLs

Referencia del trabajo con capacidades

ApAp: Aprender a Aprender
TracO: Trabajo con Otros
Comu: Comunicación
PenCrit: Pensamiento crítico
CyRes: Compromiso y Responsabilidad

Con respecto a la capacidad **Resolución de Problemas**, no está distinguida porque se trabaja a lo largo de todas las actividades del libro.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que 120 : (20 − 12) = 120 : 20 − 120 : 12? a. No, ya que la sustracción no ocupa la posición del dividendo.
   b. ¿La potenciación y la radicación son distributivas con respecto a la resta? b. No, pues solo son válidas para la multiplicación y la división.
   ApAp c. Realicen una tabla donde se distingan las operaciones "multiplicación", "división", "potenciación" y "radicación". Para cada una, indiquen en qué casos se cumple la propiedad distributiva y en cuáles no. Incluyan ejemplos para cada caso.

c.

Multiplicación	División	Potenciación	Radicación
Respecto a la suma y a la resta.	Respecto a la suma y a la resta solo cuando la suma o resta están en el dividendo.	Respecto a la multiplicación y a la división.	Respecto a la multiplicación y a la división.

ACTIVIDADES

1. Números naturales. Propiedad distributiva

1. **Resuelvan aplicando la propiedad distributiva, cuando sea posible.**

a. (720 − 100) : 5 = 720 : 5 − 100 : 5 = 144 − 20 = 124

b. 13 . (45 + 12) = 13 . 45 + 13 . 12 = 585 + 156 = 741

c. 132 : (4 − 2) = 132 : 2 = 66 (no se puede aplicar propiedad distributiva)

d. (820 + 100) : 5 = 820 : 5 + 100 : 5 = 164 + 20 = 184

e. (123 − 42) . 12 = 123 . 12 − 42 . 12 = 1 476 − 504 = 972

f. (45 + 10 + 5) : 5 = 45 : 5 + 10 : 5 + 5 : 5 = 9 + 2 + 1 = 12

g. 48 : (8 − 2) = 48 : 6 = 8 (no se puede aplicar propiedad distributiva)

h. 9. (24 + 12 − 5) = 9 . 24 + 9 . 12 − 9 . 5 = 216 + 108 − 45 = 279

2. **Unan con flechas cada expresión con su escritura equivalente. Luego, resuelvan cada cálculo.**

a. (198 + 6) : 3 = → • 198 : 3 + 6 : 3 → 66 + 2 = 68

b. (123 − 3) . 11 = → • 1 353 − 33 → 1 320

c. 500 : (25 − 5) = → • 500 : 20 → 25

d. 451 . (13 + 40) = → • 5 863 + 18 040 → 23 903

3. **Resuelvan cada cálculo descomponiendo uno de los factores de tres maneras distintas y aplicando la propiedad distributiva. Tengan en cuenta el ejemplo.**

Ejemplo: 98 . 2 = (58 + 40) . 2 = 58 . 2 + 40 . 2 = 116 + 80 = 196
98 . 2 = (100 − 2) . 2 = 100 . 2 − 2 . 2 = 200 − 4 = 196
98 . 2 = 98 . (1 + 1) = 98 . 1 + 98 . 1 = 98 + 98 = 196

a. 100 . 3 = (50 + 50) . 3 = 50 . 3 + 50 . 3 = 150 + 150 = 300
100 . (2 + 1) = 100 . 2 + 100 . 1 = 200 + 100 = 300
(40 + 60) . 3 = 40 . 3 + 60 . 3 = 120 + 180 = 300

b. 78 : 6 = (42 + 36) : 6 = 42 : 6 + 36 : 6 = 7 + 6 = 13
(90 − 12) : 6 = 90 : 6 − 12 : 6 = 15 − 2 = 13
(24 + 54) : 6 = 24 : 6 + 54 : 6 = 4 + 9 = 13

TracO

4. **Reúnanse en grupos y resuelvan la siguiente situación.**

Juan quiere cultivar lechuga y espinaca en un terreno rectangular de 20 m por 60 m.

Expresen el área total de cultivo de dos formas distintas.

(25 + 35) . 20 = 60 . 20 = 1 200

25 . 20 + 35 . 20 = 500 + 700 = 1 200

5. **Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas en sus carpetas.**

a. $\sqrt{441 + 400} = \sqrt{441} + \sqrt{400}$ F

b. $(5 - 3)^3 = 5^3 - 3^3$ F

c. $\sqrt{16 : 4} = \sqrt{16} : \sqrt{4}$ V

d. $(100 : 20)^2 = 100^2 : 20^2$ V

e. $169^2 = 160^2 + 9^2$ F

f. $\sqrt{16} = \sqrt{25} - \sqrt{9}$ F

a., b., e. y f. No es válida la distributiva de la potenciación y radicación con respecto a la suma y a la resta.
c. y d. Es válida la distributiva de la potenciación y radicación con respecto a la división.

2. Operaciones combinadas

▶ SABERES DINÁMICOS

• Para resolver un **cálculo combinado** donde aparecen las cuatro operaciones (suma, resta, multiplicación y división), se separa en términos (los signos **+** y **−** separan en términos). Luego, se pueden seguir estos pasos:

$5 . (7 - 3) + 10 - 36 : 6 =$	**1.** Se separa en términos.
$5 . 4 + 10 - 36 : 6 =$	**2.** Se resuelven las operaciones entre paréntesis.
$20 + 10 - 6 =$	**3.** Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.
$= 24$	**4.** Se resuelven las sumas y las restas.

El siguiente problema se puede resolver planteando un cálculo combinado.

Un profesor particular cobra $100 de viáticos y $500 por cada hora de clase.
Si va a dar una clase de 3 horas, ¿cuánto debe cobrar?

$100 + 3 . $500 =	*1. Se separa en términos.*	
$100 + $1 500 =	*2. Se resuelve la multiplicación.*	
= $1 600	*3. Se resuelve la suma.*	*El profesor debe cobrar $1 600.*

• Para resolver un **cálculo combinado** donde aparecen las seis operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación), se pueden seguir estos pasos:

$2 . 5^2 - 30 : 6 + \sqrt{81} . 2 - 13 =$	**1.** Se separa en términos.
$2 . 25 - 30 : 6 + 9 . 2 - 13 =$	**2.** Se resuelven las potencias y las raíces.
$50 - 5 + 18 - 13 =$	**3.** Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.
$= 50$	**4.** Se resuelven las sumas y las restas.

• Las operaciones que están en el radicando o que son base en una potencia, se deben resolver antes de calcular la raíz o la potencia (siempre primero se separa en términos).

$$13 . 4 - \sqrt{2^2 + 8 . (39 - 35)} + [(21 - 3) . 5]^2 =$$
$$13 . 4 - \sqrt{4 + 8 . (39 - 35)} + (21 - 3 . 5)^2 =$$
$$13 . 4 - \sqrt{4 + 8 . 4} + (21 - 3 . 5)^2 =$$
$$52 - \sqrt{4 + 32} + (21 - 15)^2 =$$
$$52 - \sqrt{36} + 6^2 =$$
$$52 - 6 + 36 = 82$$

TIP

Los corchetes [ ] tienen la misma función que los paréntesis. Se utilizan cuando se debe abarcar un cálculo que incluye paréntesis.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Estos cálculos ¿dan los mismos resultados? $50 - 38 : 2$ $(50 - 38) : 2$ No, primero hay que separar en términos y luego resolver la división.
   b. ¿Cuántos términos hay en $240 : \sqrt{25 - 9} . 5$? Hay un término.
   c. ¿Cuál es el resultado de $10 - 10 : 5 + 5 - \sqrt{16}$? El resultado es 9.

ApAp

ACTIVIDADES

2. Operaciones combinadas

6. Resuelvan las siguientes operaciones.

a. 324 − 780 : 5 − 35 . 2 =

324 − 156 − 70 = 98

b. 1 024 : 4 − 6 . 3 − 450 : 5 =

256 − 18 − 90 = 148

c. 800 − 156 : 1 + 49 : 7 − 4 . 78 =

800 − 156 + 7 − 312 = 339

d. 124 . 9 − 147 : 3 + 121 : 11 − 3 . 5 =

1 116 − 49 + 11 − 15 = 1 063

e. 13 . 22 − 225 : 15 + 216 : 6 − 26 : 2 =

286 − 15 + 36 − 13 = 294

f. 100 : 1 − 10 000 : 1 000 + 50 : 10 =

100 − 10 + 5 = 95

7. Encuentren los errores en los siguientes cálculos y corríjanlos.

a.
75 − 42 + 12 − 15 =
(75 − 15) + (42 − 12) =
60 + 30 = 90

Al asociar el −42 con el +12 se escriben con signos opuestos.

b.
158 − 45 − 12 − 35 =
(158 − 12) + (45 − 35) =
146 + 10 = 156

Al asociar el −45 con el −35 le falta el signo menos al 45.

8. Indiquen qué cálculo se debe hacer primero en 3 . (19 − 14 : 2) + 1. Luego, resuélvanlo.

Primero se debe resolver la división.

3 . (19 − 7) + 1 = 3 . 12 + 1 = 36 + 1 = 37

9. Agreguen paréntesis, si es necesario, para que el resultado sea correcto. Verifiquen las respuestas en la carpeta.

a. (3 . 5 + 3) . 2 − 8 . (5 − 3) = 20

b. 2 + 3 . (5 − 1) + 4 − 7 = 11

c. 1 − (4 . 3 − 12) + 15 : (4 − 1) = 6

d. 7 + (5 . 3 − 1 . 5) + 16 : (8 + 4 . 2) = 18

10. Unan con flechas cada cálculo con su resultado correcto.

a. 120 : 10 + 30 . 3 − 4 . 3 + 1 =
b. 120 : 10 + 30 . 3 − (4 . 3 + 1) =
c. [120 : (10 + 30) . 3 − 4] . (3 + 1) =
d. (120 : 10 + 30) . 3 − 4 . 3 + 1 =
e. (120 : 10 + 30) . 3 − (4 . 3 + 1) =
f. (120 : 10 + 30) . 3 − 4 . (3 + 1) =

• 89
• 113
• 110
• 91
• 20
• 115

2. Operaciones combinadas

CyRes **11. Lean atentamente y respondan.**

Para el acto de un club, se colocaron 20 filas iguales con 15 sillas y 10 banquitos en cada una.

a. ¿Cuántas sillas y cuántos banquitos se colocaron en total?

20 . 15 = 300; 20 . 10 = 200. Se colocaron 300 sillas y 200 banquitos.

b. ¿Cuántos asientos hay en cada fila?

15 + 10 = 25; hay 25 asientos en cada fila.

c. ¿Cuántos lugares para sentarse hay en total?

20 . (15 + 10) = 20 . 25 = 500; Hay 500 lugares para sentarse en total.

d. Si al acto asistieron 580 personas, ¿cuántas se quedaron sin asiento?

580 − 500 = 80; se quedaron 80 personas sin asiento.

e. Teniendo en cuenta la cantidad de "asientos disponibles", ¿quiénes deberían tener prioridad?

Las personas mayores, los que sufren alguna discapacidad, las mujeres embrazadas, los niños pequeños, etc.

12. Resuelvan.

Hernán compró tres remeras, dos pulóveres y un pantalón.

a. ¿Cuánto gastó en total?

3 . 1120 + 2 . 1550 + 2150 = 8 610

En total gastó $8 610.

b. Si paga con tarjeta de crédito en tres cuotas, le cuesta en total $820 más. ¿Cuánto le sale cada cuota?

(8 610 + 820) : 3 = 3 143,33

Cada cuota le sale $3 143,33.

13. Analicen la siguiente situación y resuélvanla.

Cande tiene en total dentro de un baúl 6 000 monedas de $10 repartidas por igual en tres cajas. Además, cada caja tiene 400 monedas de $5 y el doble de monedas de $2 que de $5. ¿Cuántas monedas hay en cada caja? ¿Cuántas monedas tiene el baúl? ¿Cuánto dinero tiene Cande en total?

6 000 : 3 + 400 + 2 . 400 = 2 000 + 400 + 800 = 3 200 En cada caja hay 3 200 monedas.

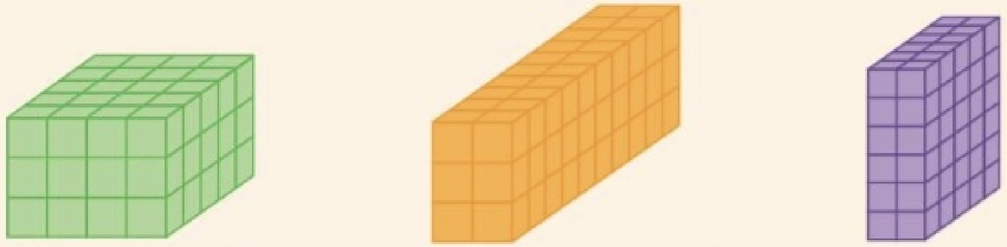
6 000 + 400 . 3 + 2 . 400 . 3 = 6 000 + 1 200 + 2 400 = 9 600 En el baúl hay 9 600 monedas.

6 000 . $10 + 400 . 3 . $5 + 2 . 400 . 3 . $2 = $60 000 + $6 000 + $4 800 = $70 800 Cande tiene $70 800.

2. Operaciones combinadas

TracO

14. Reúnanse en grupos y marquen con una X los cálculos que permiten obtener la cantidad total de cubitos que hay entre los tres cuerpos. Luego, escriban el resultado.



a. $12 . 5 + 6 . 10 + 12 . 5$ [X] b. $3 . 4 . 5 + 2 . 3 . 10 + 6 . 2 . 5$ [X] c. $4 . 5 + 3 . 10 + 2 . 5$ [ ]

$12 . 5 + 6 . 10 + 12 . 5 = 60 + 60 + 60 = 180$; $3 . 4 . 5 + 2 . 3 . 10 + 6 . 2 . 5 = 60 + 60 + 60 = 180$

La cantidad total de cubitos que hay entre los tres cuerpos es 180

15. Separen en términos y resuelvan.

a. $1262 : 2 + 3 . \sqrt{81} - 150 : 3 =$

$631 + 3 . 9 - 50 =$

$631 + 27 - 50 = 608$

b. $(25^2 : 5 + 25) + 8^2 . 2 - 5 =$

$(625 : 5 + 25) + 64 . 2 - 5 =$

$(125 + 25) + 128 - 5 =$

$150 + 128 - 5 = 273$

c. $[169 : 13 - (366 : 6 + 4)]^0 + 4^3 =$

$1 + 64 = 65$

d. $12^2 : 2^2 + 3 . 14 : (12 - 2 . 5) =$

$144 : 4 + 42 : (12 - 10) =$

$36 + 42 : 2 =$

$36 + 21 = 57$

e. $\sqrt{(2 + 14)^2 - 31} + 3 . (126 - 14 . 3^1) =$

$\sqrt{16^2 - 31} + 3 . 84 =$

$\sqrt{256 - 31} + 252 =$

$\sqrt{225} + 252 =$

$15 + 252 = 267$

f. $1470 : 14 + \sqrt{13^2 - 5^2} - (966 : 14 - 12) =$

$105 + \sqrt{169 - 25} - (69 - 12) =$

$105 + \sqrt{144} - 57 =$

$105 + 12 - 57 = 60$

16. Marquen con una X el resultado correcto.

a. $4^2 . \sqrt[3]{64} + 40 : 2^3 - \sqrt{16} =$	65	X	74		84	
b. $4^2 . (\sqrt[3]{64} + 40 : 2^3) - \sqrt{16} =$	80		84		140	X
c. $4^2 . (\sqrt[3]{64} + 40) : 2^3 - \sqrt{16} =$	74		84	X	140	
d. $4^2 . \sqrt[3]{64} + 40 : (2^3 - \sqrt{16}) =$	74	X	80		84	
e. $4^2 . (\sqrt[3]{64} + 40 : 2^3 - \sqrt{16}) =$	65		80	X	140	

3. Divisibilidad

▶ SABERES DINÁMICOS

Un número es **divisible** por otro cuando la división entre ellos es exacta, es decir, tiene resto cero.

25 es divisible por 5 *18 es divisible por 6*

Los **criterios de divisibilidad** sirven para saber si un número es divisible por otro sin hacer la cuenta.

Un número es divisible por…	cuando…	Ejemplos
2	es par.	22; 300
3	la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3.	39; 105
4	sus dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 4.	100; 124
5	su última cifra es 0 o 5.	20; 225
6	es divisible por 2 y por 3 a la vez.	12; 150
8	sus últimas 3 cifras lo son.	400; 800
9	la suma de sus cifras es múltiplo de 9.	1 800; 9 108
10	su última cifra es cero.	200; 3 550
11	la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares pares e impares es cero o múltiplo de 11.	539; 2 365
12	es divisible por 3 y por 4.	1 020; 1 188
25	sus dos últimas cifras son 0 o múltiplo de 25.	350; 2 000

El **múltiplo común menor (mcm)** entre dos o más números es el menor de los múltiplos que tienen en común esos números, sin tener en cuenta el cero.

El **divisor común mayor (dcm)** entre dos o más números es el mayor de los divisores que tienen en común esos números.

Para hallar el mcm y el dcm entre dos o más números se puede factorear cada número, es decir, descomponerlos en factores primos.

El **mcm** entre dos o más números se calcula multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

El **dcm** entre dos o más números se calcula multiplicando los factores comunes con su menor exponente.

45	3
15	3
5	5
1	

$45 = 3^2 . 5$

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$150 = 2 . 3 . 5^2$

mcm (45; 150) = $2 . 3^2 . 5^2$ = 450

dcm (45; 150) = $3 . 5$ = 15

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si un número es múltiplo de 6, ¿también lo es por 3? Sí, todo múltiplo de 6 es múltiplo de 2 y de 3.
   b. ¿Es cierto que todo número divisible por 8 es par? Sí, porque $8 = 2^3$, por lo tanto, todo múltiplo de 8 termina en cifra par y es múltiplo de 2.
   c. Inventen una regla para los números que son múltiplos de 15. Por ejemplo, todo múltiplo de 3 y de 5 es múltiplo de 15.

ApAp

ACTIVIDADES

3. Divisibilidad

17. Marquen con una X los enunciados incorrectos. Luego, corríjanlos.

a. 504 es múltiplo de 5. [X]
Puede ser 500 o 505, entre otros.

b. 633 es múltiplo de 6 y de 3. [X]
Puede ser 666 o 624 o 630, entre otros.

c. 8 900 es divisible por 4. [ ]

d. 7 es divisor de 81. [X]
Puede ser 3, 9, 18 o 27.

e. 55 es múltiplo de 5 y de 11. [ ]

f. 1 344 es divisible por 4, pero no por 12. [X]
1 344 es divisible por 4, y también por 12.

18. Completen con "siempre", "a veces" o "nunca", según corresponda.

a. Un número par es divisible por 2. siempre
b. El 1 es divisor de un número. siempre
c. Un número primo es divisible por 1 y por sí mismo. siempre
d. Un número que termina en dos cifras iguales es múltiplo de 11. a veces
e. Un número divisible por 4 es divisible por 12. a veces
f. Un número que termina en cifra impar es divisible por 2. nunca
g. El 0 es divisor de un número. nunca

19. Factoricen los siguientes números. Luego, calculen el mcm y dcm.

a. 50 | 225 |

$50 = 2 . 5^2$ $225 = 3^2 . 5^2$

mcm (50; 225) = 450

dcm (50; 225) = 25

b. 44 | 198 |

$44 = 2^2 . 11$ $198 = 2 . 3^2 . 11$

mcm (44; 198) = 396

dcm (4; 198) = 22

c. 245 | 343 |

$245 = 5 . 7^2$ $343 = 7^3$

mcm (245; 343) = 1 715

dcm (245; 343) = 49

d. 12 | 20 | 28 |

$12 = 2^2 . 3$ $20 = 2^2 . 5$ $28 = 2^2 . 7$

mcm (12; 20; 28) = 420

dcm (12; 20; 28) = 4

20. Planteen y resuelvan el siguiente problema.

Un camión transporta 198 cajas. Cada caja contiene 15 paquetes de galletitas de 7 kg cada uno y 12 paquetes de sobres de café. Si cada sobre de café pesa 1 kg, ¿cuánto pesa la carga total?

198 . (15 . 7 kg + 12 . 1 kg) = 198 . (105 kg + 12 kg) = 23 166 kg

21. Corrijan y encuentren los errores en los siguientes cálculos.

a. 125 − 42 − 12 − 15 =
125 − (42 − 12 −15) =
125 − 15 = 110

El paso uno debe quedar 125 − (42 + 12 + 15) =

b. 158 − 3 . (4 + 15) =
158 − 3 . 4 − 15 =
146 − 15 = 131

El paso uno debe quedar 158 − 3 . 4 − 3 . 15 =

c. $\sqrt{25+16}$ − 4 . 3 + 9 .12 =
$\sqrt{25}$ + $\sqrt{16}$ − 4 . 3 + 9 .12 =
5 + 4 − 12 + 108 = 105

Se distribuye la raíz en una suma

d. 4 . (2 + 3)² − 1 =
(8 + 12)² − 1 =
20² − 1 = 399

Se distribuye una expresión afectada por una potencia.

22. Completen los espacios vacíos.

a. (11 + 8) . 4 = 44 + 32 = 75

b. 3 . (52 − 40) = 156 − 120 = 36

c. (4 . 5)² = 16 . 25 = 400

d. $\sqrt[3]{64}$: 8 = 4 : 2 = 2

Fe de erratas: en el ítem e la raíz debe ser cuadrada, no cúbica.

23. Resuelvan aplicando la propiedad distributiva, cuando sea posible.

a. $144 - 12^2 : 2^4 - 3 . 5 =$ 120

b. $198 : (2 + 4) - 250 : 10 + 3^4 =$ 89

c. $(1\,000 - 500) : 5^1 - 90 : 3^0 + \sqrt[3]{64} : 2 =$ 12

d. $14 + (3 . 4)^2 + 6 . (27 - 9 . 2) =$ 212

e. $\sqrt[3]{100 - 64} + 2^3 . (5^3 - 4 . 5) =$ 846

f. $\sqrt[3]{512} - 17 . (5 - 4) + (26 : 2)^2 =$ 160

24. Lean atentamente y resuelvan.

Para armar un juego de repisas, un carpintero necesita los siguientes materiales:

- 4 paneles de madera largos.
- 6 paneles de madera cortos.
- 12 ganchitos pequeños.
- 2 ganchos grandes.
- 14 tornillos.

14 paneles de madera largo; 11 paneles de madera cortos; 33 ganchitos pequeños; 20 ganchos grandes; 72 tornillos. Se pueden construir 11 juegos de repisas.

Si el carpintero tiene en su depósito 56 paneles de madera largos, 66 paneles de madera cortos, 396 ganchitos pequeños, 40 ganchos grandes y 1 008 tornillos, ¿cuántos juegos de repisas puede armar?

25. Lean las pistas y descubran la clave.

Victoria se olvidó su clave numérica para ingresar a un juego en línea, pero recuerda algunos datos.

La clave es 60.

- La clave tiene dos cifras y es divisor de 120.
- La clave es un número múltiplo de 20.
- La clave es un número divisor de 60.
- La clave es un número múltiplo de 3.

26. Completen con un número en cada caso.

a. 91 es múltiplo de 7 y de 13.

b. 731 es divisible por 17 y por 43.

c. 3 o 31 es divisor de 93.

d. ____ no es divisible por 5. Cualquier número que no termine ni en 0 ni en 5.

27. Completen con una X según corresponda.

Número	Es divisible por...				
	2	3	5	6	10
230	X		X		X
1524	X	X		X	
2361		X			
3105		X	X		
5756	X				

28. **Marquen con una X el resultado factorizado de cada número.**

a. 18

$2 . 3$ [ ]	$2 . 3^2$ [X]	$2^2 . 3$ [ ]

b. 112

$2^4 . 7$ [X]	$2 . 7$ [ ]	$2 . 7^2$ [ ]

c. 200

$2^1 . 3 . 5$ [ ]	$2^3 . 2^5$ [ ]	$2^3 . 5^2$ [X]

d. 625

4^5 [ ]	$4 . 5$ [ ]	5^4 [X]

e. 900

$2^2 . 5^2 . 3^2$ [X]	$2 . 5 . 3^2$ [ ]	$2^2 . 5 . 3$ [ ]

f. 1 452

$2 . 3 . 11^2$ [ ]	$2^2 . 3 . 11^2$ [X]	$2^2 . 3 . 11$ [ ]

29. **Calculen el mcm y el dcm entre los siguientes números.**

a. 16 y 64. mcm = 64; dcm = 16

b. 70 y 82. mcm = 2 870; dcm = 2

c. 99 y 333. mcm = 3 663; dcm = 9

d. 120 y 450. mcm = 1 800; dcm = 30

e. 200 y 240. mcm = 1 200; dcm = 40

f. 312 y 468. mcm = 936; dcm = 156

30. **Tengan en cuenta cada condición y escriban lo pedido cuando sea posible.**

a. Cuatro números primos mayores que 7 y menores que 45. Puede ser el 11; 13; 17; 19; 23; 31; 37 y 43.

b. Cinco múltiplos de 5, mayores que 50 y menores que 75. No es posible mencionar cinco números. solo pueden ser el 55; 60; 65; 70.

c. Todos los divisores de una cifra del número 78. 2 y 3.

d. El número 30 como suma de dos números primos. 13 + 17

e. El número 13 como suma de números compuestos. 4 + 9

31. **Reúnanse en grupos y resuelvan los siguientes problemas.** TracO

a. La factura de gas de la casa de Martín vence cada 45 días; la del teléfono, cada 60 días y la del celular, cada 30 días. Si el 10 de enero coincidieron los tres vencimientos, ¿en qué fecha volverá a ocurrir lo mismo? 9 de julio

b. Se recolectaron 840 latas de arvejas, 600 tarros de leche en polvo y 144 paquetes de fideos para ayudar a las víctimas de una inundación. ¿Cuál es la mayor cantidad de bolsas con el mismo contenido de víveres que podrán enviar sin que sobre ninguno de los alimentos? ¿Cuál será el contenido de cada bolsa?
24 bolsas con 35 l. de arv., 25 t. de le. y 6 paq. de f.

c. En un camión de bomberos a control remoto, al presionar el botón "alarma" suena la bocina cada 16 segundos, suena la sirena cada 10 segundos y prende sus luces cada 20 segundos. ¿Cada cuántos segundos hace las tres cosas simultáneamente? 80 segundos.

d. En una calle se colocarán árboles y postes de luz. Los árboles se colocarán cada 48 m y los postes de luz, cada 80 m. Si se empieza colocando un árbol y un poste de luz juntos, ¿cada cuántos metros coincidirán nuevamente?
240 metros.

e. Se quiere repartir 40 chupetines y 32 tabletas de coco en bolsitas que contengan lo mismo. ¿Cuál es la mayor cantidad de bolsitas que se pueden preparar? 8 bolsitas.

f. Una editorial decide donar a distintas bibliotecas 24 libros de historia, 36 de matemática y 16 de ciencias. La idea es armar cajas con el mismo contenido, poniendo el mayor número posible de libros, y que no sobren. ¿Cuántos libros habrá en cada caja? ¿Cuántas cajas se necesitarán?
4 cajas con 6 l. de h., 9 de m. y 4 de c.

g. Mili preparó 96 masitas de chocolate, 108 de naranja y 120 de nuez. Quiere ponerlas en platos de tal manera que en todos haya la misma cantidad de masitas, pero del mismo tipo. ¿Cuál es el mayor número de masitas que puede contener cada plato? ¿Cuántos platos se necesitarán?

12 platos con 8 m. de ch., 9 de na. y 10 de nu.

4. Números enteros. Orden y representación

▶ SABERES DINÁMICOS

El conjunto de los **números enteros**, que se simboliza con la letra Z, está formado por los enteros negativos, el cero y los enteros positivos.

Z = {...; −7; −6; −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7;...}

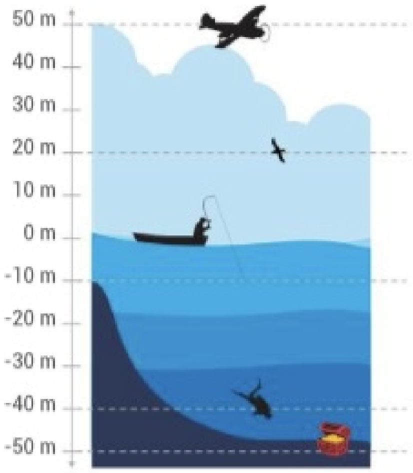
Por convención, los enteros positivos se ubican a la derecha del cero y los negativos a la izquierda.
El cero no es ni negativo ni positivo.

En el siguiente ejemplo son necesarios los números enteros para representar lo que está sobre y bajo el nivel del mar.

Observando el dibujo se puede realizar la siguiente descripción.

Áreas dinámicas [Matemática y Ciencias Naturales]

Los números enteros son necesarios para describir movimientos o fuerzas. Por ejemplo, se utilizan números negativos para representar fuerzas o movimientos que tienen sentido opuesto a uno dado.



-Sobre el nivel del mar se pueden observar un aeroplano (50 m) y un ave (20 m).

-Bajo el nivel del mar se pueden observar un anzuelo (−10 m), un buzo (−40 m) y un cofre (−50 m).

-En el nivel del mar se puede observar un bote. Su altura es 0 m y su profundidad es 0 m.

-Se puede ordenar todo lo observado desde lo que está más arriba hasta lo que está más abajo:

Aeroplano - ave - bote - anzuelo - buzo - cofre.

Para **representar los números enteros en la recta numérica**, se debe marcar el cero y elegir una unidad adecuada (escala) que debe ser respetada para ubicar el resto de los números.

−4 es menor que −2. Se escribe −4 < 2. *3 es mayor que −3. Se escribe 3 > −3.*

Se denomina **valor absoluto** de un número entero a la distancia que existe entre el número y el cero.

El valor absoluto de 2 es 2. Se escribe |2| = 2. *El valor absoluto de 8 es 8. Se escribe |8| = 8.*
El valor absoluto de −2 es 2. Se escribe |−2| = 2. *El valor absoluto de −8 es 8. Se escribe |−8| = 8.*

Dos **números** son **opuestos** cuando tienen distintos signos e igual valor absoluto. 2 y −2 son opuestos. 8 y −8 son opuestos.

En general, el opuesto de "a" se escribe "−a".

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/nument* y miren el video donde aparecen ejemplos de números enteros en la vida real.

* Enlace acortado de https://youtu.be/bZqsDRIFybQ

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que todo número positivo es siempre mayor que cualquier número negativo?
   b. ¿Qué unidad o escala conviene tomar para ubicar en una misma recta numérica los números −30, 45 y 60?
   c. ¿Es cierto que el valor absoluto de un número positivo es siempre mayor que el de un número negativo?

ApAp

a. Sí.
b. 15, porque el dcm (30; 45; 60) = 15.
c. No, porque la distancia al cero es la misma.

ACTIVIDADES

4. Números enteros. Orden y representación

CyRes **32. Calculen con un compañero el saldo anterior en cada caso. Controlen el saldo final e indiquen qué se debe tener en cuenta al subir a un medio de transporte.**

a.

b.

c.

Saldo anterior: $15 | Saldo anterior: $2 | Saldo anterior: $20

Es importante cargar la tarjeta sube y contar con dinero suficiente para que el saldo no sea negativo.

33. Escriban el número entero que representa cada situación.

a. Un alpinista está a doscientos metros de altura. +200

b. El ascensor está en el tercer subsuelo. − 3

c. La temperatura es de siete grados bajo cero. −7

d. La temperatura es de diez grados. +10

34. Analicen la siguiente situación y resuelvan.

Lucía compró una heladera con *freezer* que permite ajustar la temperatura de la heladera entre 2 °C y 9 °C y la del *freezer* entre −13 °C y −25 °C.

a. Si Lucía guardó la pasta a 5 °C y la carne a −23 °C, ¿en qué parte colocó cada alimento?

La pasta la guardó en la heladera y la carne en el freezer.

b. El helado que compró se derrite a −3 °C. ¿Qué temperatura puede tener el *freezer* para guardar ese helado sin que se derrita? De −13 a −25.

c. Lucía decidió ajustar la temperatura del *freezer* a −21 °C. Su prima lo utiliza a −19 °C. ¿En cuál de los dos se registra menor temperatura? En el freezer de lucía se registra menor temperatura.

35. Resuelvan.

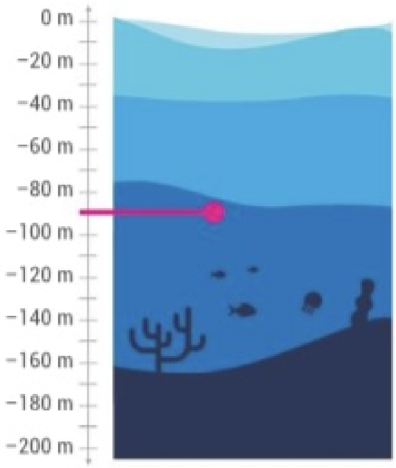
a. Representen en el gráfico la ubicación de un submarino que está a 90 metros de profundidad.

b. Si tiene que llegar a 130 m de profundidad, ¿debe ascender o descender? ¿Cuántos metros? Debe descender 40 metros.

c. Si ahora tiene que llegar a 50 m de profundidad, ¿debe ascender o descender? ¿Cuántos metros? Debe ascender 80 metros.

d. Finalmente, debe llegar a 200 metros debajo del nivel del mar. ¿Qué número representa la ubicación? ¿Cuántos metros ascendió o descendió desde su última ubicación?

−200; descendió 150 metros.



4. Números enteros. Orden y representación

36. Lean atentamente y completen la tabla con los últimos movimientos de la cuenta bancaria.

El 5 de abril Justina tenía $2 000 en su cuenta bancaria.

Fecha	6 de abril	7 de abril	8 de abril	9 de abril
Operación	Extracción de $2 400	Depósito de $900	Depósito de $300	Extracción de $1 500
Saldo	−$400	$500	$800	−$700

37. Observen las temperaturas mínimas registradas en la tabla y resuelvan.

Ciudad	Temperatura mínima
Jujuy	8 °C
Calafate	−7 °C
Posadas	14 °C
Esquel	−5 °C
San Martín de los Andes	−3 °C
Pinamar	2 °C
Neuquén	0 °C

a. ¿En qué ciudades se registraron temperaturas bajo cero? Calafate, Esquel y San Martín de los Andes.

b. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre la máxima y la mínima? 21 °C.

c. Ordenen las temperaturas mínimas de menor a mayor. −7 °C, −5 °C, −3 °C, 0 °C, 2,8 °C y 14 °C.

d. ¿En qué ciudad se registró la temperatura más baja? Calafate.

e. ¿Es cierto que en Esquel la temperatura mínima era más baja que en San Martín de los Andes?
Sí, −5 < −3.

f. ¿Qué ciudades registraron una temperatura mínima superior a un grado bajo cero?
Neuqúen, Pinamar, Jujuy y Posadas.

38. Escriban cuatro números que cumplan con la condición indicada, cuando sea posible.

a. Números enteros mayores que −6. −5; −4; −3; −2 ... son infinitas las soluciones.

b. Números naturales menores que −1. No es posible, todo número natural es mayor que 0.

c. Números enteros menores que 2 y mayores que −7. −6; −5; −4; −3; −2; −1; 0 y 1.

d. Números enteros mayores que −9 y menores que −4. −8; − 7; −6; −5.

e. Dos números opuestos entre sí cuyo módulo sea 7. −7 y 7.

f. Todos los números que estén a dos unidades de distancia del 0. −2 y 2.

g. Todos los números que estén a cuatro unidades de distancia del −6. −10 y −2.

39. Seleccionen una unidad adecuada y representen los siguientes números.

a. −15; 45; −60; 30; −90 y −45.

b. −300; −150; −375 y 225.

40. Completen con > (mayor), < (menor) o = (igual), según corresponda.

a. 5 [>] −2

b. −6 [<] 2

c. −2 [>] −10

d. |−12| [=] 12

e. −3 [<] 0

f. 6 [>] −7

g. −5 [>] −9

h. |−9| [>] |−7|

i. −47 [<] −46

j. −1 000 [<] −999

4. Números enteros. Orden y representación

41. **Completen la tabla.**

Número	Anterior	Siguiente	Valor absoluto	Opuesto
−17	−18	−16	17	17
−99	−100	−98	99	99
−2	−3	−1	2	2
0	−1	1	0	No tiene.
−39	−40	−38	39	39
12	11	13	12	−12

42. **Indiquen cuál es el número en cada caso.**

a. El número "a" es el opuesto de −14. a = 14

b. El número "b" es el anterior del opuesto de 11. b = −12

c. El número "c" es el doble del opuesto de "a". c = −28

d. El número "d" es la tercera parte del número "b". d = −4

e. El número "e" es el valor absoluto del número "d". e = 4

43. **Escriban V (verdadero) o F (falso).**

a. $1 > -2$ V

b. $-8 < -9$ F

c. $-3 > 4$ F

d. $-7 < -3$ V

e. $-123 > -122$ F

f. $1 > -500$ V

g. $1 < -4$ F

h. $-30 < -31$ F

44. **Decidan cuáles son los números enteros que cumplen con cada condición.**

a. El opuesto de 9. −9

b. El anterior de −5. −6

c. El opuesto de −7. 7

d. El opuesto del opuesto de −3. −3

e. El anterior de −102. −103

f. El valor absoluto es 4 y es negativo. −4

g. El valor absoluto es 2 y es positivo. 2

h. El siguiente de −1. 0

i. El opuesto del anterior de −3. 4

j. Representa la distancia entre −11 y 3. 14

k. Su valor absoluto es 23. 23 o −23

l. Es mayor que −3 y menor que 2. −2, −1, 0, 1

45. **Encuentren el error en cada relación. Explíquenlos.**

a. $|18| = -18$

El módulo es positivo, da 18.

b. 7 es el valor absoluto del opuesto de −8.

El opuesto de −8 es 8 y su valor absoluto es 8.

c. $21 > |-21|$

Son iguales.

d. $-45 > |-48|$

$-45 < 48$

5. Adición y sustracción. Supresión de paréntesis y sumas algebraicas

▶ SABERES DINÁMICOS

Adición y sustracción

Para **sumar** (o **restar**) **números enteros** se pueden realizar los siguientes pasos:

1. Se eliminan los paréntesis (supresión de paréntesis).

• Si el signo que lo precede es "**+**", el signo dentro del paréntesis no cambia.

$9 + (+3) = 9 + 3$ $\qquad -18 + (+6) = -18 + 6$

$10 + (-3) = 10 - 3$ $\qquad -21 + (-9) = -21 - 9$

• Si el signo que lo precede es "**−**", el signo dentro del paréntesis cambia.

$18 - (+13) = 18 - 13$ $\qquad -18 - (+13) = -18 - 13$

$10 - (-5) = 10 + 5$ $\qquad -5 - (-13) = -5 + 13$

2. Se suma (o resta) teniendo en cuenta las siguientes reglas.

• Si los números tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y al resultado le corresponde ese mismo signo. $9 + 3 = 12$ $\qquad 10 + 5 = 15$ $\qquad -21 - 9 = -30$ $\qquad -18 - 13 = -31$

• Si los números tienen distinto signo, se restan sus valores absolutos y al resultado le corresponde el signo del número con mayor valor absoluto.

$10 - 3 = 7$ $\qquad 13 - 18 = -5$ $\qquad -18 + 6 = -12$ $\qquad -5 + 13 = 8$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/supar* para saber más acerca de cómo se suprimen los paréntesis en sumas algebraicas.

*Enlace acortado de https://youtu.be/9xCbQMdQ2S4

Suma algebraica

Una **suma algebraica** es una sucesión de sumas y restas.

Para resolver una suma algebraica se pueden utilizar estos procedimientos.

• **Opción 1:** se resuelve de izquierda a derecha tomando los términos de a dos.

$7 - 8 + 4 - 10 + 6 - 5 - 9 =$

$-1 + 4 - 10 + 6 - 5 - 9 =$

$3 - 10 + 6 - 5 - 9 =$

$-7 + 6 - 5 - 9 =$

$-1 - 5 - 9 =$

$-6 - 9 = -15$

• **Opción 2:** se agrupan los términos positivos por un lado y los negativos por el otro. Se suman los valores absolutos de cada grupo y se resta el resultado de los positivos y de los negativos.

$7 - 8 + 4 - 10 + 6 - 5 - 9 =$

$(7 + 4 + 6) - (8 + 10 + 5 + 9) =$

$17 - 32 = -15$

Un ascensor está en el segundo subsuelo, sube seis pisos y luego baja cinco pisos, vuelve a subir siete pisos y finalmente baja nueve. ¿En qué piso quedó el ascensor?

Opción 1: $-2 + 6 - 5 + 7 - 9 =$

$4 - 5 + 7 - 9 =$

$-1 + 7 - 9 =$

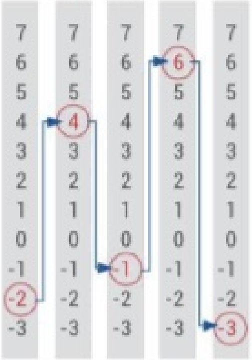
$6 - 9 = -3$

Opción 2: $-2 + 6 - 5 + 7 - 9 =$

$(6 + 7) - (2 + 5 + 9) =$

$13 - 16 = -3$

Respuesta: quedó en el tercer subsuelo.



TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

   a. ¿Cuánto da la suma entre 4 y su número opuesto? ¿Y entre −13 y su opuesto?

   b. ¿Está bien resuelta la siguiente suma algebraica? $2 - 3 + 6 - 8 = (2 + 6) - (3 - 8)$

ApAp

   c. Vuelvan a leer el procedimiento 2 del tema "Adición y sustracción" y armen una tabla donde expliquen cómo resolver cuando los números tienen el mismo signo y cuando tienen distinto signo. Escriban nuevos ejemplos para cada caso.

a. $4 + (-4) = 4 - 4 = 0$; $-13 + (+13) = -13 + 13 = 0$

b. No, debe quedar $(2 + 6) - (3 + 8)$.

c. A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

5. Adición y sustracción. Supresión de paréntesis y sumas algebraicas

46. Supriman los paréntesis en caso de ser necesario y, luego, resuelvan.

a. −7 + 10 = 3
b. 4 − 9 = −5
c. −11 + 8 = −3
d. −3 − 5 = −8
e. −8 − 15 = −23
f. −13 − (−13) = 0
g. 17 − 33 = −16
h. 2 + (−9) = −7
i. 2 − (−9) = 11
j. −5 − (−1) = −4
k. −5 + (−1) = −6
l. −(−2) − (−8) = 10
m. −(−10) + (−12) = −2
n. −(5) − (−6) = 1
ñ. −3 + (−14) = −17

47. Tengan en cuenta que la amplitud térmica es la diferencia entre las temperaturas máxima y mínima y resuelvan.

a. Completen la tabla que corresponde al registro de temperaturas en diferentes ciudades en un mismo día.

Ciudad	Temperatura mínima	Temperatura máxima	Amplitud térmica
París	6 °C	15 °C	9 °C
Esquel	−2 °C	6 °C	8 °C
Lima	16 °C	25 °C	9 °C
Antártida	−17 °C	2 °C	19 °C
Roma	−2 °C	10 °C	12 °C
Dublín	−6 °C	5 °C	11 °C

b. Ordenen de mayor a menor las temperaturas mínimas. 16 °C, 6 °C, −2 °C, −6 °C, −17 °C.

c. ¿En qué ciudad se registró la menor temperatura? ¿Y la mayor? En la Antártida la mínima y en Lima la máxima.

d. ¿En qué ciudad se registró la mayor amplitud térmica? En la Antártida se registró la mayor amplitud térmica.

48. Resuelvan las siguientes sumas algebraicas.

a. 7 − 8 + 4 − 10 + 6 − 5 − 9 =
(7 + 4 + 6) − (8 + 10 + 5 + 9) =
17 − 32 = −15

b. −12 + 7 − 6 − 10 + 3 + 4 + 2 =
(7 + 3 + 4 + 2) − (12 + 6 + 10) =
16 − 28 = −12

c. 8 + 9 −13 − 17 + 21 − 16 − 2 =
(8 + 9 + 21) − (13 + 17 + 16 + 2) =
38 − 48 = −10

d. −30 + 32 − 3 + 1 − 25 =
(32 + 1) − (30 + 3 + 25) =
33 − 58 = −25

e. 26 − 6 − 16 − 10 + 6 − 1 =
(26 + 6) − (6 + 16 + 10 + 1) =
32 − 33 = −1

f. −100 + 50 − 350 + 400 − 50 =
(50 + 400) − (100 + 350 + 50) =
450 − 500 = −50

5. Adición y sustracción. Supresión de paréntesis y sumas algebraicas

49. **Lean atentamente y resuelvan.**
Fran leyó en el comprobante del cajero que su saldo en la cuenta del banco es de −$2 000.

a. Hizo un depósito y le quedaron $6 000 de saldo en su cuenta. ¿Cuánto dinero depositó? Expliquen la respuesta.

$-2\,000 + x = 6\,000 \rightarrow x = 6\,000 + 2\,000 \rightarrow x = 8\,000$

Depositó $8 000.

b. Luego, realizó el pago de un producto y el saldo quedó en −$3 000. ¿Cuál fue el costo del producto? ¿Cómo hicieron para averiguarlo?

$6\,000 - x = -3\,000 \rightarrow 6\,000 + 3\,000 = x \rightarrow x = 9\,000$

El importe del gasto fue de $9 000.

TracO

50. **Reúnanse en grupos y resuelvan los siguientes problemas.**

a. El encargado de un edificio acomodó una escalera en el tercer subsuelo, luego subió 12 pisos para dejar un impuesto, bajó 13 pisos para buscar una herramienta y subió 5 pisos para arreglar un desperfecto. ¿En qué piso dejó el impuesto? ¿En cuál estaba la herramienta? ¿Y el desperfecto?

Dejó el impuesto en el piso 9 ($-3 + 12 = 9$); la herramienta estaba en el cuarto subsuelo ($9 - 13 = -4$) y el desperfecto estaba en el piso 1 ($-4 + 5 = 1$).

b. Un submarino está a 8 000 metros de profundidad, desciende 2 500 metros, asciende 1 800 metros y vuelve a descender 600 metros. ¿A qué profundidad se encuentra?

$-8\,000 - 2\,500 + 1\,800 - 600 = -9\,300$

Se encuentra a 9 300 metros de profundidad.

c. El matemático Pitágoras nació en el 569 a. C. (antes de Cristo) y murió en el 475 a. C. ¿Cuántos años vivió?

$-475 - (-569) = -475 + 569 = 94$

El matemático Pitágoras vivió 94 años.

d. La rueda fue inventada alrededor del 3500 a. C. Por otro lado, Leonardo da Vinci hizo bocetos de un carruaje mecánico sin caballos, aproximadamente hacia el año 1500 d. C. ¿Cuántos años transcurrieron entre ambos inventos?

$1500 - (-3500) = 1500 + 3500 = 5000$

Entre ambos inventos trascurrieron 5000 años.

e. La semana pasada, un minero trabajó a 5 metros bajo el nivel del mar y esta semana, a 8 metros bajo el nivel del mar. ¿Cuál es la distancia entre ambas ubicaciones? ¿Con qué cálculo pueden representar la situación? ¿El minero ascendió o descendió?

La distancia entre ambas ubicaciones es de 3 metros. El cálculo es $-5 - (-8) = -5 + 8 = 3$.

El minero descendió.

5. Adición y sustracción. Supresión de paréntesis y sumas algebraicas

51. Completen la tabla con los resultados de cada operación. Luego, comparen los resultados obtenidos y escriban sus conclusiones.

n	p	q	n + p + q	n − p + q	n − (p − q)	−n − p − q
10	8	−12	6	−10	−10	−6
−25	40	−20	−5	−85	−85	5
−36	−15	22	−29	1	1	29
100	40	−50	90	10	10	−90

Conclusiones: Los resultados de la primera y cuarta columna son opuestos. Los resultados de la segunda columna son iguales a la tercera.

52. Marquen con una X la respuesta correcta.

a. ¿Cuánto hay que sumarle a −10 para obtener −4? −6 ☐ 6 ☒ X
b. ¿Cuánto hay que restarle a 7 para obtener 12? −5 ☒ X 5 ☐
c. ¿Cuánto hay que sumarle a −2 para obtener −15? −13 ☒ X 13 ☐
d. ¿Cuánto hay que restarle a −14 para obtener −30? −16 ☐ 16 ☒ X
e. ¿Cuánto hay que restarle al módulo de −5 para obtener 0? −5 ☐ 5 ☒ X

53. Completen con los números que corresponden. Coloquen paréntesis cuando sea necesario.

a. 8 + [(−6)] = 2
b. −2 + [(−8)] = −10
c. 5 − [(−9)] = 14
d. −3 − [(−8)] = 5
e. −5 + [6] = 1
f. 12 + [(−14)] = −2
g. −24 − [2] = −26
h. −8 + [(−2)] = −10

54. Escriban los números que faltan en cada suma algebraica.

a. − [6] + 6 − 4 + 10 = 6
b. −12 − (−5 + [1]) = −8
c. −(−14 + 9 − 8 − [7]) = 20
d. −(−9 − 2) − 13 − [3] = −5

DinámicaMente

Descubran la regla que permite continuar con cada secuencia.

a. −15; −11; −7;... Sumar 4.
b. −2; −8; −14;... Restar 6.
c. −4; 0; 4;... Sumar 4.

6. Multiplicación y división

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **multiplicar** (o **dividir**) números enteros se deben tener en cuenta las siguientes reglas de signos.

Regla de los signos	
Para la multiplicación	Para la división
+ . + = +	+ : + = +
− . − = +	− : − = +
+ . − = −	+ : − = −
− . + = −	− : + = −

- El **producto** de **dos números enteros de igual signo** es un número **positivo**.
  7 . 8 = 56 −3 . (−9) = 27

- El **cociente** de **dos números enteros de igual signo** es un número **positivo**.
  25 : 5 = 5 −64 : (−4) = 16

- El **producto** de **dos números enteros de distinto signo** es un número **negativo**.
  20 . (−5) = −100 (−12) . 3 = −36

- El **cociente** de **dos números enteros de distinto signo** es un número **negativo**.
  (−81) : 9 = −9 20 : (−4)= −5

Si se multiplican o dividen más de dos números, se deben aplicar las reglas anteriores resolviendo las operaciones de izquierda a derecha.

12 . (−2) . (−3) =
−24 . (−3) = 7

(−9) . (−4) : (−6) =
36 : (−6) = −6

(−32) : 4 : (−2) =
−8 : (−2) = 4

100 : (−10) . 3 =
−10 . 3 = −30

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/muldiven* para mirar un video donde se explica cómo multiplicar y dividir números enteros.

*Enlace acortado de https://youtu.be/-ngjlgOKwlk

Para conocer el signo que tendrá el resultado de multiplicaciones y divisiones de más de dos números (sin incluir el 0), se puede contar la cantidad de números negativos...

- Si la cantidad de números negativos es **par**, el resultado es **positivo**.

  (−24) : 4 . 3 : (−9) = 2 ← **2 números negativos, resultado positivo.**

- Si la cantidad de números negativos es **impar**, el resultado es **negativo**.

  (−24) : (−4) . 3 : (−9) = −2 ← **3 números negativos, resultado negativo.**

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué signo tiene el resultado de 500 . (−300) . 0? Ninguno porque el resultado es 0.
   b. ¿Cuál es el resultado de la división entre un número y su opuesto? Siempre da −1.
   c. ¿Qué signo tiene el producto de diez factores, si ninguno es 0 y solo dos son positivos? Positivo.
   ApAp d. Armen una tabla que muestre el signo que tiene el resultado de una multiplicación o división de números enteros según el signo que tengan los números que intervienen. Escriban nuevos ejemplos para cada caso.

+	por	+	Igual	+
+	por	−	Igual	−
−	por	+	Igual	−
−	por	−	Igual	+

ACTIVIDADES

6. Multiplicación y división

55. Resuelvan las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a. 8 . (−7) = −56
b. −3 500 : 70 = −50
c. −126 . 12 = −1 512
d. 54 : (−3) = −18
e. −132 . (−15) = 1 980
f. −76 : (− 4) = 19
g. (−891) : (−1) = 891
h. (−1 477) . 0 = 0
i. −1 : (−1) = 1
j. 0 : (−190) = 0
k. −28 : 7 . 2 = −4 . 2 = −8
l. 120 : (−4) . (−8) = −30 . (−8) = 240
m. −9 . (−4) : (− 3) = 36 : (−3) = −12
n. (−125) : 5 . (−2) = −25 . (−2) =50

56. Unan con flechas cada cálculo con su resultado.

a. (−38) : 2 . (−3) =
b. (−12) . (−4) . (−10) =
c. (−19) . (−1) . (−3) =
d. (−23) . (−5) : (−1) =
e. (−26) : (−13) : 2 =
f. (−240) : (−4) . 8 =
g. 140 : 7 : (−20) =

• −115
• 480
• −480
• −57
• −1
• 57
• 1

57. Completen la tabla con los resultados de cada operación. Luego, comparen los resultados obtenidos y escriban sus conclusiones.

a	b	c	a . b	b . c	a . b : c	a : b . c
−27	−9	3	243	−27	81	9
−56	7	−4	−392	−28	98	32
300	10	−5	3 000	−50	−600	−150
225	15	−3	3 375	−45	−1 125	−45
−90	−6	3	540	−18	180	45

DinámicaMente

TracO

Reúnanse en grupos y respondan.

a. Se multiplican siete números enteros, ninguno es cero y seis factores son positivos. ¿Qué signo tiene el resultado? Negativo.
b. Se multiplican trece números enteros, uno es cero y once factores son negativos. ¿Qué signo tiene el resultado? No tiene porque da 0.
c. ¿Qué signo tiene el producto de diez números enteros, si siete factores son positivos y tres, negativos? Negativo.
d. ¿Qué signo tiene el producto de un número positivo y su opuesto? Negativo.

7. Operaciones combinadas con números enteros

▶ SABERES DINÁMICOS

El siguiente cálculo se puede resolver de dos formas distintas.

Procedimiento 1

9 − (−20 + 4 −13 + 2) + (−15 − 10) =

9 + 20 − 4 + 13 − 2 − 15 − 10 = **1.** Se suprimen los paréntesis.

(9 + 20 + 13) − (4 + 2 + 15 + 10) = **2.** Se resuelve la suma algebraica.

42 − 31 = 11

Procedimiento 2

9 − (−20 + 4 −13 + 2) + (−15 − 10) =

9 − (−27) + (−25) = **1.** Se resuelven las operaciones que encierran los paréntesis.

9 + 27 − 25 = **2.** Se suprimen los paréntesis.

36 − 25 = 11 **3.** Se resuelve la suma algebraica.

• Para resolver un cálculo combinando las cuatro operaciones, pueden seguir estos pasos:

−25 : 5 . 3 + 18 − 4 . (−9) = **1.** Se separa en términos.

−15 + 18 − (−36) = **2.** Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.

−15 + 18 + 36 = 39 **3.** Se resuelven las sumas y las restas.

• Para resolver un cálculo combinando en donde hay paréntesis y corchetes, pueden seguir estos pasos:

[(−12 − 3 . 5) : (−2 − 7)] . (−14) + 17 = **1.** Se separa en términos.

[(−27) : (−9)] . (−14) + 17 = **2.** Se resuelven las operaciones que encierran los paréntesis.

3 . (−14) + 17 = **3.** Se resuelven las operaciones que encierran los corchetes.

−42 + 17 = −25 **4.** Se resuelven todas las operaciones.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que [120 − 64 : (20 − 12)] . 3 + 1 = [120 − 64 : (20 − 12)] . 4? No es cierto. No es correcta la separación en términos.
   b. ¿Es cierto que [120 − 64 : (20 − 12)] . 3 + 1 = [120 − 64 : 8] . 3 + 1? Sí.

ApAp

   c. ¿Qué se debe resolver primero en el siguiente cálculo? 382 − [−15 . 3 + (−15 : 5 − 3)] . (−6) = Escriban los pasos que se deben seguir para resolver todo el cálculo.
   La división del paréntesis y la multiplicación −15 . 3.
   382 − [−45 + (−3 − 3)] . (−6) =
   382 − [−45 + (−6)] . (−6) =
   382 − (−51) . (−6) =
   382 − (306) = 76

7. Operaciones combinadas con números enteros

58. Resuelvan de dos formas distintas.

a. 19 − 16 + (15 − 20 − 2) + (−15 − 6) = 19 − 16 + (−7) + (−21) = 3 + (−7) + (−21) = −4 + (−21) = −25

19 − 16 + 15 − 20 − 2 − 15 − 6 = (19 + 15) − (16 + 20 + 2 + 15 + 6) = 34 − 59 = −25

b. −63 + 19 − (−15 + 16 − 2) − (−28 + 7) = −63 + 19 − (1 − 2) − (−21) = −44 + 1 + 21 = −43 + 21 = −22

−63 + 19 + 15 − 16 + 2 + 28 − 7 = (19 + 15 + 2 + 28) − (63 + 16 + 7) = 64 − 86 = −22

c. −120 − (−15 + 6 −19) + (−8 + 6 − 29) = −120 − (−9 − 19) + (−2 − 29) = −120 − (−28) + (−31) = −92 − 31 = −123

−120 + 15 − 6 + 19 − 8 + 6 − 29 = (15 + 19 + 6) − (120 + 6 + 8 + 29) = (40) − (163) = −123

59. Resuelvan los siguientes problemas mediante un solo cálculo.

a. María fue al *shopping*, dejó el auto en el segundo subsuelo, subió cinco pisos para comprar ropa y luego bajó dos pisos para ir al patio de comidas. ¿En qué piso está el patio de comidas?

En el piso 1 (−2 + 5 − 2 = 1).

b. A las 2 am la temperatura era de 2 °C bajo cero. Una hora después, descendió 4 °C y en la siguiente hora subió 6 °C. ¿Cuál era la temperatura a las 4 am?

La temperatura era de 0 °C (−2 °C − 4 °C + 6 °C = 0 °C).

c. Los alumnos de segundo año realizaron un experimento con el profesor de Biología. En la primera etapa tenían una sustancia a 29 °C y disminuyeron su temperatura en 32 °C para congelarla. En la segunda etapa la enfriaron 15 °C más. ¿A qué temperatura quedó la sustancia al finalizar la segunda etapa?

Quedó a −18 °C (29 °C − 32 °C − 15 °C = −18 °C).

d. Un filósofo nació en el año −365 y murió en el 293 a. C. Su primo era escultor, nació en el año 355 a. C. y falleció en el 265 a. C. Calculen la diferencia entre la cantidad de años que vivió cada uno e indiquen quién vivió más.

−293 − (−365) = −293 + 365 = 72; −265 − (−355) = −265 + 355 = 90.

El escultor vivió 18 años más que el filósofo (90 − 72 = 18).

60. Escriban V (verdadero) o F (falso). En los casos falsos, indiquen el resultado correcto.

a. 18 : (−3 − 3) + 2 = 5	F	18 : (−6) + 2 = −3 + 2 = −1
b. −27 . (14 − 4) − (−15) = −255	V	
c. −25 − 240 : (−30 − 50) = −28	F	−25 − 240 : (−80) = −25 + 3 = −22
d. −81 : (−9) + 3 . (1 − 11) = −21	V	
e. −16 − (−225) : (−15) = 9	F	−16 − (15) = −31
f. 300 − 150 : (−15) + 10 = 0	F	300 + 10 + 10 = 320

61. **Unan con flechas los cálculos que dan el mismo resultado. Luego, escriban el resultado.**

a. −(−10 − 8) : (−2 − 7) =
b. (9 − 17) . (−2 − 3) =
c. −19 . (−5 − 4) =
d. (156 − 51) : (−3) =
e. −(−56 − 40) : (−6 −10) =

- −19 . (−5) + (−19) . (−4) = 171
- 96 : (−16) = −6
- 156 : (−3) − 51 : (−3) = −35
- 18 : (−9) = −2
- (−8) . (−2) − (−8) . 3 = 40

62. **Resuelvan los siguientes cálculos.**

a. (−8) . (−5) . (−2) − (−7) = −80 + 7 = −73
b. (−8) . (−5) . 2 − (−7) = 80 + 7 = 87
c. (−8) . (−5) . (−2) + (−7) = −80 − 7 = −87
d. −(−54) + (−21 + 10) . (−4) = 54 + (−11) . (−4) = 54 + 44 = 98
e. −54 − (−21 + 10) . (−4) = −54 − (−11) . (−4) = −54 − 44 = −98
f. −(−54) − (21 − 10) . 4 = 54 − (−11) . 4 = 54 − (−44) = 98

63. **Encuentren los resultados incorrectos y corríjanlos.**

a	b	c	d	a . b + c . d	a . (b + c) − d	(a − b) : (c − d)
−10	6	12	4	−12	−184 184	−2 1
2	−48	−2	23	−142 142	−123	−2
8	40	−10	−2	340	242 −242	4
100	4	16	4	464 −464	1996	8 −8
−65	−9	13	6	663 636	−266 266	−8 8

64. **Marquen con una X el cálculo que representa el problema y resuelvan.**

a. Agustín tenía $5 600 en su lata de ahorros y gastó la cuarta parte en un nuevo teclado para su computadora, $370 en un *mouse* y la mitad de lo que gastó en el teclado, en un libro de computación. ¿Cuánto dinero le quedó?

- 5600 − 5600 : 4 + 370 − 370 : 4 : 2 = ☐
- 5600 − 1 500 : 4 + 370 + 5600 : 4 : 2 = ☐
- 5600 − (5 600 : 4 + 370 + 5600 : 4 : 2) = X Le quedaron $3 130.

b. Belén tiene 2 675 ganchitos de distinto tipo. En una caja guarda la quinta parte, en un cajón el doble de lo que guarda en la caja y en un frasco, la mitad del resto. ¿Cuántos ganchitos guardó en el frasco?

- 2675 : 5 − 2675 : 5 . 2 + 2675 : 2 = ☐
- [2675 − (2675 : 5 + 2 . 2675 : 5)] : 2 = X En el frasco guardó 535 ganchitos.
- (2675 − 2675 : 5 − 2 . 2675 : 5) : 2 = ☐

7. Operaciones combinadas con números enteros

65. Completen con un número para que se cumpla la igualdad.

a. (−20) − [−44] = (−4) . (−6)

b. (−35) : ([−2] − 5) = −(−5)

c. −225 : (3 . [5]) + 1 = −14

d. 360 : (− 5 − 5) − 3 . [0] = −36

e. (−280) : [−5] . (−4) = −224

66. Agreguen corchetes para que los resultados sean correctos.

a. [120 − 100] : (−5) = −4

b. 60 : [(−15) : (−3)] = 12

c. [−95 + 60] : 5 = −7

d. −900 : [15 . 20] − 2 = −5

e. 10 . [18 . (−7) + 6] = −1 200

f. [36 + 22 − 8] . 4 = 200

67. Resuelvan suprimiendo paréntesis y corchetes.

a. −5 . 8 − (−2 + 3 − 5) + 6 =

−40 + 2 − 3 + 5 + 6 =

(2 + 5 + 6) − (40 + 3) =

13 − 43 = −30

b. −1 − (4 − 3 − 7) + 10 : 2 =

−1 − 4 + 3 + 7 + 5 =

(3 + 7 + 5) − (1 + 4) =

15 − 5 = 10

c. 15 : 3 + (−4 + 11) − (1 − 2) =

5 − 4 + 11 − 1 + 2 =

(5 + 11 + 2) − (4 + 1) =

18 − 5 = 13

d. −(−16 + 27) − 2 . 2 + (3 − 21 + 7) =

16 − 27 − 4 + 3 − 21 + 7 =

(16 + 3 + 7) − (27 + 4 + 21) =

26 − 52 = −26

e. 4 : (−2) − [2 − 3 + (−10 + 15)] − 1 =

−2 − (2 − 3 − 10 + 15) − 1 =

−2 − 2 + 3 + 10 − 15 − 1 =

(3 + 10) − (2 + 2 + 15 + 1) = 13 − 20 = −7

f. 30 − [15 + 7 − (7 − 3 − 4) − 2] − 3 . 7 =

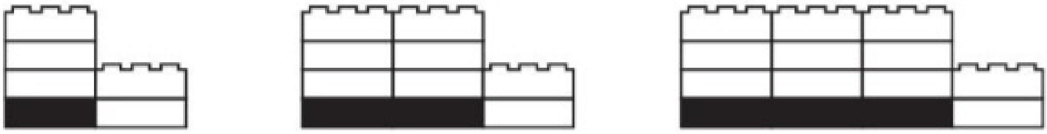
30 − (15 + 7 − 7 + 3 + 4 − 2) − 21 =

30 − 15 − 7 + 7 − 3 − 4 + 2 − 21 =

(30 + 7 + 2) − (15 + 7 + 3 + 4 + 21) = 39 − 50 = −11

68. Las siguientes estructuras se armaron con bloques blancos y negros.

Con 1 bloque negro. Con 2 bloques negros. Con 3 bloques negros.



Si se arma una estructura con 10 bloques negros, ¿qué cuenta hay que hacer para calcular la cantidad de bloques blancos? Señalen la opción correcta.

a. 12 . 3 [ ]   b. 10 . 3 [ ]   c. 10 . 3 + 2 [X]   d. 10 . 4 + 2 [ ]

69. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen sus respuestas.

a. Todos los números enteros son negativos. F

b. El 0 es un número positivo. F

c. El anterior de −9 es −8. F

d. −3 es menor que −1. V

e. El siguiente del siguiente de −6 es −4. V

f. Los números enteros positivos se llaman naturales. V

g. El valor absoluto de −12 es −12. F

70. Indiquen cuál es el número entero que corresponde a cada situación.

a. La cochera está en el 2.º subsuelo. −2

b. La temperatura es de 10 ºC bajo cero. −10

c. El hecho ocurrió en el año 6 a. C. −6

d. Planta baja. 0

e. Tuve un gasto de $8. −8

f. 9 metros bajo el nivel del mar. −9

g. Primer piso. 1

71. Marquen en una recta numérica los números que están a 5 unidades de distancia del cero.

−5 y 5

72. Resuelvan.

a. Escriban todos los números naturales que hay entre −10 y 5. 1, 2, 3 y 4.

b. Escriban todos los números enteros que hay entre −8 y 4. −7; −6; −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3.

c. Escriban todos los números enteros que son mayores que −7 y menores que 2. −6; −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1.

d. Escriban todos los números enteros que son mayores que −3 y menores que −10.
No hay ninguno

73. Escriban el anterior y posterior de cada número.

a. 0 −1 y 1

b. −7 −8 y −6

c. −84 −85 y −83

d. −116 −117 y −115

e. −1 000 −1 001 y −999

f. −1 200 −1 201 y −1 199

74. Completen cada enunciado.

a. El opuesto de 19 es... −19

b. El anterior de −5 es... −6

c. El siguiente de −93 es... −92

d. El anterior de −56 es... −57

e. El siguiente del siguiente de −9 es... −7

f. El opuesto de −7 es... 7

g. El opuesto del opuesto de −1 es... −1

75. Ordenen los siguientes números de menor a mayor.

−5; −2; 6; −8; −12; −6; −4.

−12; −8; −6; −5; −4; −2; 6

76. Escriban V (verdadero) o F (falso).

a. $-4 > 0$ F

b. $-(-3) = |-3|$ V

c. $0 < -2$ F

d. $-3 > -5$ V

e. $9 > -10$ V

f. $-88 < -87$ V

g. $(-4 + 1) = |3|$ F

h. $-1\,001 > -1\,000$ F

77. Resuelvan las siguientes sumas algebraicas.

a. $-7 + 80 - 14 - 5 + 6 =$ 60

b. $-55 - 23 + 31 - 35 + 34 =$ −48

c. $12 - 23 - 17 + 44 - 62 + 31 - 6 - 2 =$ −23

d. $-27 + 81 - 3 - 9 + 18 - 1 + 10 =$ 69

e. $-6 - 17 - 25 + 32 - 4 - 24 + 100 =$ 56

f. $17 - 18 - 46 + 55 - 49 + 5 - 72 - 1 =$ −109

g. $80 - 79 + 48 + 37 - 63 - 56 - 11 =$ −44

h. $-9 - 30 - 26 + 57 - 18 + 42 - 20 =$ −4

78. Unan con flechas cada expresión con su resultado.

a. $|-9| + |-6| =$

b. $-|-3 + 2| + |-9 + 2| =$

c. $-|-20| - |-31| =$

d. $-|-15 - (-22)| =$

e. $2 \cdot |-4 + (-7 - 2)| =$

• −51

• −7

• 15

• 26

• 6

79. **Completen la tabla. Luego, indiquen qué matemático vivió más años.**

Matemático	Año de nacimiento	Año de fallecimiento	Años de vida
Aristóteles	−384	−322	62
Arquímedes	−287	−212	75
Thales	−640	−546	94
Eratóstenes	−257	−194	63

Thales vivió más años.

80. **Resuelvan.**

La siguiente tabla muestra las temperaturas promedio de la ciudad de Calafate durante una semana.

Día	Temperatura
Lunes	5 °C
Martes	3 °C
Miércoles	−2 °C
Jueves	−6 °C
Viernes	−3 °C
Sábado	1 °C
Domingo	5 °C

a. Ordenen las temperaturas de menor a mayor.
−6; −3; −2; 1; 3; 5.

b. ¿En cuáles días coincidió la temperatura?
Lunes y domingo.

c. Representen las temperaturas en una recta numérica.
A cargo del alumno.

d. Calculen la amplitud térmica semanal.
5 °C − (−6 °C) = 5 °C + 6 °C = 11 °C

81. **Resuelvan estos problemas.**

a. En las primeras dos horas de un día, la temperatura descendió 10 °C cada hora. En cada una de las siguientes dos horas, aumentó 4 °C. En las tres horas siguientes, volvió a bajar 3 °C cada hora. Si la temperatura inicial fue de 26 °C, ¿cuál fue la final? 5 °C

b. Un submarino nuclear descendió a 502 m de profundidad, luego ascendió 257 m y, finalmente, descendió 60 m. ¿A qué profundidad se encuentra?
−305 m

c. El ascensor de una torre de oficinas realizó los siguientes desplazamientos: arrancó en el 3.º piso, subió 5 pisos, bajo 3, subió 2, bajo 4, subió 5 y bajó 6 pisos. ¿En qué piso se detuvo finalmente?
En el 2.° piso.

d. Tomi metió sus $500 en un bolsillo. Gastó $200; se le cayeron $150; fue al banco y retiró $300, pero se le cayeron $200. ¿Cuánto dinero le quedó?
Le quedan $250.

82. **Revisen y corrijan los resultados incorrectos.**

a. $-5 - 3 + 2 + [-4 + 3 - (-2 + 1)] - 1 - 10 = -17$

b. $-13 - 3 - [-3 - (-3 - 3) - 3] - 3 - 6 = 25$ ~~25~~ −25

c. $-(-3 - 2) + [-2 - 2 + (-2 - 2) + 2] - 10 = -11$
−11

d. $2 + 13 - [-10 - (14 - 23) - (-14 + 2)] - 2 = -2$ ~~−2~~ 2

83. **Escriban V (verdadero) o F (falso).**

a. $-38 : (-19) - [-6 . (-9 + 4)] < -30$ F

b. $-6 . [-(19 - 7) : (-3)] - (-20) : (-4) < 29$ V

c. $-[-9 - (-22 + 16)] + 42 : (-3 - 4) = -3$ V

d. $-72 : [-21 - (-8 + 14) . (-5)] < -14$ F

e. $96 : (-5 - 3) - [-(-12) + 1 . (-14)] > 10$ F

f. $[-15 : (-3) + (-9 - 11) : (-5)] - 6 = 3$ V

84. **Unan con flechas cada cálculo con su resultado.**

a. $(-9 + 3 - 8) . (-7 - 5) - (-101) =$ • 100

b. $-120 : (-15) - [-18 - (14 + 16)] =$ • 56

c. $-112 : (-9 + 2) - (-4 + 1) =$ • −4

d. $(-99 + 45 - 128) : (-2) + 18 - 72 =$ • 269

e. $(81 - 189) : (-9) + (-48 + 32) =$ • 37

f. $(-160 + 148) . (-8) - (-320) : 80 =$ • 19

85. **Agreguen a cada cálculo corchetes para que se verifique la igualdad.**

a. $(-9) - [6 . (-17) - 27] : 1 = 120$

b. $-9 - 6 . [-17 - 27] : (-12) = -31$

c. $[(-10) - 2 . (-7) - 27] : (-23) = 1$

d. $14 - [-13 . 2 + 6] : (-2) + 5 = 9$

e. $-14 . [(-26 - 10) : (-6)] - (-3) = -81$

8. Potenciación y sus propiedades

▶ SABERES DINÁMICOS

La **potenciación** es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales.

exponente

base de la potencia → $a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{\text{"n" veces}}$

$a^0 = 1$	$2^0 = 1$	$(-2)^0 = 1$
$a^1 = a$	$3^1 = 3$	$(-3)^1 = -3$

El signo de la potencia depende del signo de la base y del exponente.

- Si la **base es positiva**, la **potencia** siempre **es positiva**.

  $5^4 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 625$

- Si la **base es negativa** y el **exponente es par**, la **potencia es positiva**.

  $(-8)^2 = (-8) \,.\, (-8) = 64$

- Si la **base es negativa** y el **exponente es impar**, la **potencia es negativa**.

  $(-6)^3 = (-6) \,.\, (-6) \,.\, (-6) = -216$

TIP

En los casos en que la base es negativa, pero no hay paréntesis, el exponente afecta solo al número.

$-8^2 = -(8 \,.\, 8) = -64$

$-6^3 = -(6 \,.\, 6 \,.\, 6) = -216$

La potenciación cumple con las siguientes **propiedades**.

Propiedades	Ejemplos	En símbolos
El **producto de potencias de igual base** es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes dados.	$5^3 \,.\, 5^2 = 5^{3+2} = 5^5 = 3\,125$	$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$
El **cociente de potencias de igual base** es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la resta de los exponentes dados.	$5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5^1 = 5$	$a^m : a^n = a^{m-n}$
La **potencia de una potencia** es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es igual al producto de los exponentes dados.	$(5^2)^3 = 5^{2.3} = 5^6 = 15\,625$	$(a^m)^n = a^{m.n}$
La **potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y la división.**	$(3 \,.\, 5)^2 = 3^2 \,.\, 5^2 = 9 \,.\, 25 = 225$ $(8 : 2)^3 = 8^3 : 2^3 = 512 : 8 = 64$	$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que $(-2)^2$ da lo mismo que 2^2? Sí es cierto, ambas dan 4.
   b. ¿Cuál es el resultado de $(-1)^{20}$? ¿Y de $(-1)^{21}$? $(-1)^{20} = 1$ y $(-1)^{21} = -1$.
   c. ¿Es correcta la siguiente igualdad? $(7^3)^4 = 7^{3+4}$ No, los exponentes se multiplican, daría $7^{3.4} = 7^{12}$.
   ApAp d. Escriban un ejemplo para cada una de las propiedades de la potenciación. A cargo del alumno.

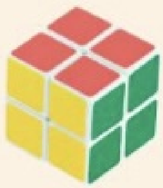
ACTIVIDADES

8. Potenciación y sus propiedades

TracO

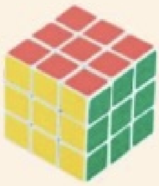
86. Reúnanse en grupos y escriban como producto y luego como potencias, la cantidad de cubitos que tiene cada cubo grande.

a.



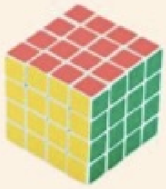
$2 . 2 . 2 = 2^3$

b.



$3 . 3 . 3 = 3^3$

c.



$4 . 4 . 4 = 4^3$

87. Escriban en cada caso la potencia y el resultado.

a. De base −4 y exponente 3. $(-4)^3 = -64$

b. De base −2 y exponente 6. $(-2)^6 = 64$

c. De base −19 y exponente 0. $(-19)^0 = 1$

d. De base −1 y exponente el doble de 6. $(-1)^{12} = 1$

e. De base $(-2)^2$ y exponente 3. $[(-2)^2]^3 = (-2)^6 = 64$

f. De base $(-1)^5$ y exponente 3. $[(-1)^5]^3 = (-1)^{15} = -1$

88. Calculen las siguientes potencias.

a. $7^2 =$ 49

b. $(-9)^3 =$ −729

c. $(-10)^4 =$ 10 000

d. $(-57)^1 =$ −57

e. $-2^6 =$ −64

f. $(-2)^6 =$ 64

g. $-5^3 =$ −125

h. $(-5)^3 =$ −125

i. $0^6 =$ 0

j. $(-15)^0 =$ 1

k. $-15^0 =$ −1

l. $(-1)^6 =$ 1

m. $(-1)^9 =$ −1

n. $-6^3 =$ −216

ñ. $-1^{10} =$ −1

o. $(-7)^4 =$ 2 401

89. Completen la siguiente tabla.

a	b	a^2	b^2	a^3	b^3	a^0	b^1	$a^2 + b^2$
5	−3	25	9	125	−27	1	−3	34
7	4	49	16	343	64	1	4	65
−3	1	9	1	−27	1	1	1	10
−8	−2	64	4	−512	−8	1	−2	68

90. Determinen para qué valores de "n" se cumple la igualdad.

a. $n^3 = -8$ n = −2

b. $n^2 = 16$ n = −4 o 4

c. $n^5 = -1$ n = −1

d. $(-8)^n = 64$ n = 2

e. $[(-3)^5]^n = -243$ n = 1

91. Resuelvan aplicando propiedades de potenciación.

a. $(-4)^2 . (-4)^3 = (-4)^{2+3} = (-4)^5 = -1\,024$

b. $(-11)^7 : (-11)^5 = (-11)^{7-5} = (-11)^2 = 121$

c. $(-5)^4 . (-5)^3 : (-5)^5 = (-5)^{4+3-5} = (-5)^2 = 25$

d. $[(-3)^2]^3 = (-3)^{2.3} = (-3)^6 = 729$

e. $[3 . (-2)^2]^2 = 3^2 . (-2)^{2.2} = 9 . (-2)^4 = 9 . 16 = 144$

f. $[(-7)^{12} : (-7)^{10} . (-7)^1]^2 = (-7)^{(12-10+1).2} = (-7)^6 = 117\,649$

g. $a^{19} . a^{15} : a^{32} = a^{19+15-32} = a^2$

h. $[m^7 . m^6 : m^{11}]^3 = m^{(7+6-11).3} = m^6$

9. Radicación y sus propiedades

▶ SABERES DINÁMICOS

La **radicación** es una operación entre dos números "a" y "n" llamados **radicando** e **índice**, respectivamente.

radical

índice → $\sqrt[n]{a} = b$ ← raíz

radicando

$\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

- Si el **radicando** es **positivo**, la **raíz** es **positiva**.

$\sqrt{25} = 5$ $\qquad$ $\sqrt{144} = 12$

- Si el **radicando** es **negativo** y el **índice** es **impar**, la **raíz** es **negativa**.

$\sqrt[3]{-125} = -5$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-64} = -4$

- Si el **radicando** es **negativo** y el **índice** es **par**, la **raíz no tiene solución** en el conjunto de los números enteros, ya que ningún número entero elevado a un exponente par da por resultado un número negativo.

$\sqrt{-4}$ y $\sqrt[4]{-16}$ no tienen solución en el conjunto de los números enteros.

Propiedades	Ejemplos	En símbolos
Simplificación de índices.	$\sqrt{3^6} = \sqrt[2:2]{3^{6:2}} = 3^3 = 27$	$\sqrt[n]{a^b} = \sqrt[n:c]{a^{b:c}}$ con $c \neq 0$
Amplificación de índices.	$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3.2]{64^{1.2}} = \sqrt[6]{4\,096} = 4$	$\sqrt[n]{a^b} = \sqrt[n.c]{a^{b.c}}$ con $c \neq 0$
Raíz de raíz.	$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2.2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
La radicación es distributiva con respecto a la multiplicación y la división.	$\sqrt{4\,.\,9} = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{9} = 2\,.\,3 = 6$ $\sqrt[3]{64 : 8} = \sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8} = 4 : 2 = 2$	$\sqrt[n]{a\,.\,b} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/radprop* para mirar un video donde se explican las propiedades de la radicación.

*Enlace acortado de https://youtu.be/dT6BcSrH4q0

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que $\sqrt{-9} = 3$? ¿Por qué? No. No tiene solución en enteros.
   b. ¿En la raíz $\sqrt[5]{2^3}$ es posible simplifcar el índice? No. El 3 y el 5 son coprimos.
   c. ¿Es válida la siguiente igualdad? $\sqrt[3]{-8 + (-27)} = \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-27}$ No. No vale la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la suma.

ApAp d. Escriban un ejemplo para cada una de las propiedades de la radicación. A cargo del alumno.

9. Radicación y sus propiedades

92. Completen las tablas.

a.

n	0	-1	2	-3	4	-5	6	-7	8	-9	10
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

b.

n	0	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10
n^3	0	1	−8	27	−64	125	−216	343	−512	729	−1 000

93. Calculen las siguientes raíces cuando sea posible.

a. $\sqrt{9}$ = 3

b. $\sqrt{-4}$ = No tiene solución en Z.

c. $\sqrt{81}$ = 9

d. $\sqrt[3]{-27}$ = -3

e. $\sqrt[3]{8}$ = 2

f. $\sqrt[3]{-343}$ = -7

g. $\sqrt[3]{1}$ = 1

h. $\sqrt[4]{1\,296}$ = 6

i. $\sqrt[7]{-1}$ = -1

j. $\sqrt[5]{-243}$ = -3

k. $\sqrt[6]{64}$ = 2

l. $\sqrt[4]{-16}$ = No tiene solución en Z.

m. $\sqrt[5]{-3\,125}$ = -5

n. $\sqrt[9]{0}$ = 0

ñ. $\sqrt[3]{1\,728}$ = 12

94. Indiquen si las igualdades son correctas. Corrijan los casos incorrectos. Luego, calculen los resultados.

a. $\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[6]{256}$

No. La raíz del primer término queda con índice 8. Da 2.

b. $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$

No. Porque no es ditributiva. Da 5.

c. $\sqrt[3]{-64 : 8} = \sqrt[3]{-64} : \sqrt[3]{8} =$

Sí. Da −2.

d. $\sqrt[5]{-3\,125 . (-1)} = \sqrt[5]{-3\,125} . \sqrt[5]{-1}$

Sí. Da 5.

e. $\sqrt[3]{2^9} = 2^6$

No. Simplificando el primer término queda 2^3. Da 8.

f. $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{125} = \sqrt[9]{125}$

No. No se pueden sumar los índices. Da 15.

g. $\sqrt{a} + \sqrt{a} = \sqrt[4]{a}$

No. No se pueden sumar los índices. Da 2 . $\sqrt{a}$.

h. $\sqrt{\sqrt[4]{z}} = \sqrt[6]{z}$

No. La raíz del primer término queda con índice 8. Da $\sqrt[8]{z}$.

95. Escriban entre qué números enteros consecutivos se encuentra cada raíz.

a. −2 < $\sqrt[3]{-1}$ < 0

b. −2 < $\sqrt[3]{-2}$ < −1

c. 2 < $\sqrt[4]{17}$ < 3

d. −2 < $\sqrt[7]{-1}$ < 0

e. −3 < $\sqrt[5]{-40}$ < −2

f. 6 < $\sqrt{37}$ < 7

96. Completen para que se cumpla la igualdad.

a. $\sqrt{196}$ = 14

b. $\sqrt[4]{1\,296}$ = 6

c. $\sqrt[3]{-8}$ = −2

d. $\sqrt[3]{-1\,000}$ = −10

e. $\sqrt[3]{-512}$ = −8

f. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ = 2

10. Operaciones combinadas con potencias y raíces

▶ SABERES DINÁMICOS

Operaciones combinadas

Para resolver un **cálculo combinado con todas las operaciones** vistas, se pueden seguir estos pasos.

$5 \cdot \sqrt{64} + 24 : 3 - 7 \cdot 2^3 =$	**1.** Se separa en términos.
$5 \cdot 8 + 24 : 3 - 7 \cdot 8 =$	**2.** Se resuelven las potencias y raíces.
$40 + 8 - 56 =$	**3.** Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
$48 - 56 = -25$	**4.** Se resuelven las sumas y restas.

$(-5+3)^3 - \sqrt{15 + 2 \cdot (-3)} + (-49 : 7 + 5)^2 =$	**1.** Se separa en términos.
$(-2)^3 - \sqrt{9} + (-2)^2 =$	**2.** Se resuelven las operaciones que están en los paréntesis y raíces.
$-8 - 3 + 4 =$	**3.** Se resuelven las potencias y raíces.
$-11 + 4 = -7$	**4.** Se resuelven las sumas y restas.

Lenguaje coloquial y algebraico

Un cálculo combinado puede presentarse a través de una **expresión coloquial** que se puede traducir al **lenguaje algebraico**.

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
La raíz cuadrada de la diferencia entre 10 y el siguiente de 5.	$\sqrt{10 - (5+1)}$
El cubo de la suma entre el opuesto de 20 y el anterior de −4.	$[-20 + (-4 - 1)]^3$
El producto entre la raíz cuarta de 16 y el siguiente de −2.	$\sqrt[4]{16} \cdot (-2 + 1)$
El cociente entre el cuadrado de −6 y la tercera parte del opuesto de 12.	$(-6)^2 : [(-12) : 3]$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/opercomb* para mirar la resolución de un cálculo combinado explicado paso a paso.

*Enlace acortado de https://youtu.be/AeHWB9QYWnU

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es correcta la siguiente simplificación? ¿Por qué? $\sqrt{16 + 3^2} = \sqrt{16 + 3^2}$ No, porque el exponente 2 es solo del 3 así que no se puede simplificar con el índide de la raíz.
   b. ¿Se puede afirmar que lo primero que se debe hacer para resolver el siguiente cálculo es separar en términos dentro del corchete? $\sqrt{16} - 3 \cdot [4 - 36 : (-6)]^2$ Sí.

   ApAp c. Traduzcan la expresión coloquial "la raíz cuadrada de la diferencia entre 10 y el siguiente de −7" al lenguaje algebraico. Luego, resuelvan el cálculo.
   $\sqrt{10 - (-7+1)} =$
   $\sqrt{10 - (-6)} =$
   $\sqrt{10 + 6} =$
   $\sqrt{16} = 4$

10. Operaciones combinadas con potencias y raíces

97. **Resuelvan los siguientes cálculos combinados.**

a. $(-9)^2 - \sqrt[3]{-64} - (-3)^4 - \sqrt[3]{-729} =$

$81 - (-4) - 81 - (-9) =$

$81 + 4 - 81 + 9 = 13$

b. $\sqrt[5]{-6 - 13 . 2} + (-15 + 3 . 21) - 13 . (-1) =$

$\sqrt[5]{-6 - 26} + (-15 + 63) - (-13) =$

$\sqrt[5]{-32} + 48 + 13 =$

$-2 + 48 + 13 = 59$

c. $(-100)^0 + (-8) . (-32 + 3 . 12)^4 - (-14) =$

$1 + (-8) . (-32 + 36)^4 + 14 =$

$1 + (-8) . 4^4 + 14 =$

$1 + (-8) . 256 + 14 = 1 - 2\,048 + 14 = -2\,033$

d. $(-5)^3 . (-3) - 294 : (-7)^2 + \sqrt[3]{-2 - 5^2} =$

$-125 . (-3) - 294 : 49 + \sqrt[3]{-2 - 25} =$

$375 - 6 + \sqrt[3]{-27} =$

$375 - 6 - 3 = 366$

e. $-5\,184 : (-4 : 2 - 1)^2 + \sqrt[5]{-119 + 151} =$

$-5\,184 : (-2 - 1)^2 + \sqrt[5]{32} =$

$-5\,184 : (-3)^2 + 2 =$

$-5\,184 : 9 + 2 = -576 + 2 = -574$

f. $(-7)^4 . (-2) + \sqrt{225} - \sqrt{10^2 + 5^3 - (-4) . (-5) . 10} =$

$2\,401 . (-2) + 15 - \sqrt{100 + 125 - 200} =$

$-4\,802 + 15 - \sqrt{25} =$

$-4\,802 + 15 - 5 = -4\,792$

g. $(128 - 4 . 12)^2 - 4 . \sqrt{21^2 + 20^2} + (-211 + 13) =$

$(128 - 48)^2 - 4 . \sqrt{441 + 400} + (-198) =$

$88^2 - 4 . \sqrt{841} - 198 =$

$88^2 - 4 . \sqrt{841} - 198 =$

$7\,744 - 4 . 29 - 198 = 7\,744 - 116 - 198 = 7\,430$

h. $-8 : \sqrt{5^2 - 3^2} - (-12)^0 + (117 : 13)^4 =$

$-8 : \sqrt{25 - 9} - 1 + 9^4 =$

$-8 : \sqrt{16} - 1 + 6\,561 =$

$-8 : 4 - 1 + 6\,561 = -2 - 1 + 6\,561 = 6\,558$

i. $\sqrt[3]{-1\,944 : 9} + (6 . 5^2 - 120) - 216 : (-9) : 2^3 =$

$\sqrt[3]{-216} + (6 . 25 - 120) - (-24) : 8 =$

$6 + (150 - 120) - (-3) =$

$6 + 30 + 3 = 39$

j. $(-5^2 + 3 . 19) - \sqrt[3]{(-2)^5 + 2^5 . 17} - (-8)^2 =$

$(-25 + 57) - \sqrt[3]{-32 + 32 . 17} - 64 =$

$32 - \sqrt[3]{-32 + 544} - 64 =$

$32 - \sqrt[3]{512} - 64 = 32 - 8 - 64 = -40$

k. $\sqrt{13^2 - 5^2} + (-13 - 5 . 4^3) + \sqrt{28} . \sqrt{7} =$

$\sqrt{169 - 25} + (-13 - 5 . 64) + \sqrt{28 . 7} =$

$\sqrt{144} + (-13 - 320) + \sqrt{196} =$

$12 + (-333) + 14 = 12 - 333 + 14 = -307$

l. $\sqrt{(2^2 + 3^2) : (-13) + 37} - (-18 + 5^2) . (-7)^2 - 12^0 =$

$\sqrt{(4 + 9) : (-13) + 37} - (-18 + 25) . 49 - 1 =$

$\sqrt{13 : (-13) + 37} - 7 . 49 - 1 = \sqrt{-1 + 37} - 343 - 1 =$

$\sqrt{36} - 343 - 1 = 6 - 343 - 1 = -338$

98. **Coloquen corchetes cuando sea necesario para que se cumpla la igualdad en cada caso.**

a. $(-5)^3 \;.\; (-5)^2 + (-4)^3 - \sqrt{144} \;.\; \sqrt[3]{-64} = -3\,141$

b. $(-5)^3 \;.\; [(-5)^2 + (-4)^3] - \sqrt{144} \;.\; \sqrt[3]{-64} = 4\,923$

c. $(-5)^3 \;.\; [(-5)^2 + (-4)^3 - \sqrt{144}] \;.\; \sqrt[3]{-64} = -25\,500$

d. $(-5)^3 \;.\; (-5)^2 + [(-4)^3 - \sqrt{144}] \;.\; \sqrt[3]{-64} = -2\,821$

10. Operaciones combinadas con potencias y raíces

99. **Resuelvan aplicando las propiedades de la potenciación y de la radicación.**

a. $(-9)^{12} \cdot (-9)^{8} : (-9)^{17} - \sqrt{\sqrt{16}} =$

$(-9)^{12+8-17} - \sqrt[2.2]{16} =$

$(-9)^{3} - \sqrt[4]{16} = -729 - 2 = -731$

b. $\sqrt[3]{(-5)^{6}} : (-5) + [(-2)^{3}]^{2} =$

$(-5)^{6/3} : (-5) + (-2)^{3.2} =$

$(-5)^{2-1} + (-2)^{6} = -5 + 64 = 59$

c. $\sqrt[3]{-96} \cdot \sqrt[3]{-18} - (9^{7} : 9^{5})^{2} =$

$\sqrt[3]{-96 \cdot (-18)} - (9^{7-5})^{2} =$

$12 - 9^{4} = 12 - 6\,561 = -6\,549$

d. $\sqrt[3]{500} : \sqrt[3]{4} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} =$

$\sqrt[3]{500 : 4} - \sqrt{3 \cdot 48} =$

$\sqrt[3]{125} - \sqrt{144} = 5 - 12 = -7$

e. $[(-7)^{12} \cdot (-7)^{4} : (-7)^{5}] : [(-7)^{2}]^{4} =$

$(-7)^{12+4-5} : (-7)^{2.4} = (-7)^{11} : (-7)^{8} = (-7)^{11-8} = (-7)^{3} = -343$

100. **Completen los espacios vacíos para que se verifique la igualdad en cada caso.**

Fe de erratas: donde dice − (−2) debe decir + (−2)

a. $\sqrt[3]{-343} - 9 - (-2)^{\boxed{4}} = 0$

b. $[(-8) \cdot (\boxed{-4})]^{1} - (-3)^{2} = 23$

c. $\sqrt[3]{\boxed{16}} \cdot \sqrt[3]{108} + (-9)^{9} : (-9)^{7} = 93$

d. $\sqrt[3]{-207 - \boxed{-550}} + (-13) + (-28)^{0} = -5$

TracO

Fe de erratas: esta actividad debería llevar ícono grupal. Donde dice −22 debe ir -2^{2}.

101. **Reúnanse por grupos y analicen todos los errores que aparecen en la resolución del siguiente cálculo. Luego, calculen el resultado correcto.**

$-22 + \sqrt{-1 \cdot (-9)} : (-3 + 2) =$

$4 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-9} : 1 =$

$4 - 1 \cdot (-3) : 1 =$

$4 + 3 : 1 =$

$7 : 1 = -1$

En el primer renglón $-2^{2} = -4$.

En el segundo renglón, al distribuir la raíz no se puede resolver porque quedan radicandos negativos de índice par.

En el tercer renglón, no se separa bien en términos.

Pasos correctos:

$-4 + \sqrt{9} : (-1) =$

$-4 + 3 : (-1) =$

$-4 - 3 = -7$

10. Operaciones combinadas con potencias y raíces

102. Planteen el cálculo y resuelvan.

a. La suma entre el doble de la raíz cuadrada de 169 y la raíz quinta del opuesto de 32.

$2 . \sqrt{169} + \sqrt[5]{-32} = 2 . 13 + (-2) = 26 - 2 = 24$

b. El cubo del cociente entre la raíz cuadrada de 676 y la raíz cúbica del cuádruple de −2.

$[\sqrt{676} : \sqrt[3]{4 . (-2)}]^3 = (26 : \sqrt[3]{-8})^3 = [(26 : (-2)]^3 = (-13)^3 = -2\,197$

c. La diferencia entre el triple de la raíz cuadrada de 144 y la raíz cúbica de 2 197.

$3 . \sqrt{144} - \sqrt[3]{2\,197} = 3 . 12 - 13 = 36 - 13 = 23$

d. El producto entre el cuadrado de −7 disminuido en 5 unidades y el cubo del opuesto de 3.

$[(-7)^2 - 5] . (-3)^3 = (49 - 5) . (-27) = 44 . (-27) = -1\,188$

e. La suma entre el módulo de −243 y la raíz quinta del opuesto de −243.

$|-243| + \sqrt[5]{-(-243)} = 243 + \sqrt[5]{243} = 243 + 3 = 246$

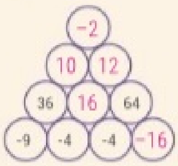
f. El producto entre el cuadrado de −5 y la suma entre −6 y la raíz cuarta de 625.

$(-5)^2 . (-6 + \sqrt[4]{625}) = 25 . (-6 + 5) = 25 . (-1) = -25$

DinámicaMente

TracO

Reúnanse en grupos y descubran los números que faltan en el esquema, según los pasos a seguir desde la fila de abajo (primera fila) a la de arriba (cuarta fila).



1. Cada número de la segunda fila es el producto de los dos números de la primera fila que lo sostienen.
2. Cada número de la tercera fila es la suma de las raíces cuadradas de los dos números de la segunda fila que lo sostienen.
3. El número de la cuarta fila es la diferencia entre los dos números de la tercera fila que lo sostienen (el de la izquierda “menos” el de la derecha).

Integración final

103. Analicen la siguiente situación.

Víctor y Mili discuten cómo resolver $120^{13} : 120^{13}$. Mili dice que el resultado es 120^{0} porque es posible restar los exponentes de las potencias y Víctor dice que el resultado es 1, porque al hacer la división se está dividiendo un número por sí mismo. ¿Quién tiene razón? Expliquen sus respuestas.
Los dos tienen razón.

104. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen sus respuestas.

a. $n^7 . n^2 = n^5$ $n^{7+2} = n^9$ — F

b. $(z^2)^7 = z^{14}$ — V

c. $(4 - 3)^2 = 4^2 - 3^2$ No vale la distributiva. — F

d. $\sqrt[3]{1\,728} = \sqrt[3]{8} . \sqrt[3]{216}$ — V

e. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = \sqrt[6]{256}$ $\sqrt[2.2.2]{256} = \sqrt[8]{256}$ — F

f. $(a^2 : b^3)^2 = a^4 : b^6$ — V

105. Analicen cuál es la última cifra del resultado de una potencia que tiene base 5 e indiquen si se cumple con cualquier exponente distinto de 0. Encuentren otro número en el que se cumpla la misma condición. La última cifra siempre es 5. Con potencias de base 6, la última cifra siempre es 6.

106. Encuentren, si es posible, tres valores de "a" que cumplan con cada relación, en cada caso.

a. $(-a)^9 < a^9$ Por ejemplo: 1, 2, 3, 4,...

b. $(-a)^9 > a^9$ Por ejemplo: −1, −2, −3, −4,...

c. $(-a)^9 = a^9$ Solo se verifica para a = 0.

107. Resuelvan.

a. Si "n" es un número entero, ¿cuáles de las siguientes expresiones sirven para obtener un número par? Pueden darle valores a "n" para verificar.
2n; 2n + 2; 2n + 4

n + 4	2.n + 2
2.n	2.n + 4
2.n + 1	2.n + 5

b. ¿De las expresiones anteriores, ¿cuál permite obtener un número impar?
2n + 1; 2n + 5

108. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Cuáles son los números comprendidos entre −10 y 10 cuya raíz cúbica es un número entero?
−8; −1; 0; 1 y 8.

b. Una habitación en forma de cubo tiene un volumen de 512 metros cúbicos. ¿A qué altura está el techo? (En la página 187 pueden buscar la fórmula del volumen del cubo.) $\sqrt[3]{512\ m^3} = 8$ m

c. La raíz cuadrada de 169, ¿puede ser −13? Si tienen dudas, pueden repasar la página 33.
No, siempre es 13.

109. Marquen con una X las afirmaciones correctas. Expliquen por qué son incorrectas las que no marcaron.

a. Toda raíz de índice par y radicando positivo tiene resultado positivo. — X

b. Toda raíz de índice impar y radicando negativo tiene resultado positivo. — ☐

c. Si el resultado de una potencia de exponente par es positivo, entonces la base de la potencia es positiva. — ☐

d. La raíz cuadrada de −81 es −9. — ☐

e. Toda potencia de base negativa elevada a la cero da 1. — X

110. Completen con >, < o =, según corresponda.

a. $(-3 + 4)^2$ [=] $\sqrt{1}$

b. $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ [>] $-|-3|$

c. $\sqrt{4 . (-9)^2}$ [<] $[(-4)^2]^3$

d. $\sqrt[3]{-6 . (-5) - (-34)}$ [=] $\sqrt{5^2 - (-3)^2}$

e. $-15 - [-4 + \sqrt{1 - 4 . (-6)}]$ [>] -4^4

111. Indiquen qué operación hay que resolver primero en cada cálculo. Luego, resuelvan.

a. $[-3 . (-2)^3 - 4 . 5^2] : (-2) =$ $(-2)^3$ y 5^2 Da 38.

b. $-3 + (-1 - 5)^2 : (-2) =$ $(-1 - 5)$ Da −21.

c. $-\sqrt{7 . 343} + 1 =$ 7 . 343 Da −48

d. $(-1 - 6 : 2)^4 + 12 =$ 6 : 2 Da 268.

112. **Completen los casilleros vacíos para que se cumpla la igualdad.**

a. $\sqrt[3]{-27} = -3$

b. $\sqrt[7]{-128} = -2$

c. $\sqrt[11]{0} = 0$

d. $\sqrt{\sqrt[5]{1\,024}} = 2$

e. $\sqrt[13]{-1} = -1$

f. $\sqrt[5]{7\,776} = 6$

113. **Resuelvan planteando un único cálculo.**

a. Lucía tenía \$3 565. Tuvo que pagar un impuesto de \$1 220, otro de \$457 y \$114 por intereses. Pancho le pagó \$322 que le debía. ¿Cuánto dinero le quedó a Lucía? \$2 096

b. Un submarino se encuentra a las 14:20 a una profundidad de 1 240 m. En ese momento, comienza a subir 40 m por minuto. ¿A qué profundidad se encuentra luego de 8 minutos? ¿Cuántos metros le faltan para llegar a la superficie? ¿A qué hora llega?
920 m; 920 m; 14 h 51 min.

c. Mariano tiene \$84 de saldo en su tarjeta SUBE, gasta \$60 el lunes y \$60 el martes. En cada uno de los siguientes 3 días realizará 3 viajes de \$18. Si carga \$200, ¿qué saldo le quedará al finalizar el viernes? \$110.

114. **Completen la tabla.**

a	3	−4	−6	7
b	4	25	81	121
c	−8	27	−64	125
a^2	9	16	36	49
$\sqrt{b}$	2	5	9	11
$\sqrt[3]{c}$	−2	3	−4	5
$4a^2 - (\sqrt{b} - \sqrt[3]{c})$	32	62	131	190

115. **Lean atentamente y resuelvan.**

Leo tiene una cuenta corriente con un saldo deudor de \$9 570. Recibió dos depósitos de \$1 220 cada uno y cuatro depósitos de \$457 cada uno. Unos días después, extrajo tres veces \$500 y una vez \$900. ¿Cuál es el saldo actual?

−\$9 570 + 2 . \$1 220 + 4 . \$457 − 3 . \$500 − \$900 =
−\$9 570 + \$2 440 + \$1 828 − \$1 500 − \$900 =
(\$2 440 + \$1 828) − (\$9 570 + \$1 500 + \$900) =
\$4 268 − \$11 970 = −\$7 702

116. **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.**

a. $(2 - 4)^2 - 24 : (-6) + (5^2 + 3) : (-4) =$ 1

b. $\sqrt{50 : 5 + 3^2 + 6} - 4^2 + (-5 + 2) : (-3) =$ −10

c. $(1^5 + \sqrt[3]{64}) : (-5) + \sqrt[3]{-125} \,.\, (-2)^4 =$ −81

d. $\sqrt[3]{1 - 3^2} - (-2)^4 : 2 + \sqrt{36 : (-9) + 4^2 + 13} =$ −5

e. $\sqrt[3]{-2 + \sqrt{100}} - (-1 - \sqrt[3]{-27})^2 + \sqrt[8]{256} =$ 0

f. $\sqrt{\sqrt{25} + \sqrt{121}} + \sqrt[4]{\sqrt[3]{-8} \,.\, \sqrt{64} \,.\, (-1)} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{81}} =$ 4

g. $\sqrt[5]{-320 : 10} - \sqrt{-25 \,.\, (-36)} - \sqrt[3]{27 \,.\, (-64) : 8} =$ −26

117. **Escriban el cálculo y resuelvan.**

a. La diferencia entre el triple del cuadrado del siguiente de −12 y el cuádruple del opuesto de 12.
$3 \,.\, (-12 + 1)^2 - 4 \,.\, (-12) = 411$

b. El cociente entre la raíz cuadrada del cuádruple del opuesto de −100 y el siguiente de −3.
$\sqrt{4 \,.\, [-(-100)]} : (-3 + 1) = -10$

c. La suma entre el triple de 3 y el cubo de la diferencia entre la raíz cuarta de 16 y siete.
$3 \,.\, 3 + (\sqrt[4]{16} - 7)^3 = -116$

118. **Unan con una flecha cada cálculo con su expresión.**

a. $\sqrt{a \,.\, a \,.\, a + 12} =$

b. $b^{15} \,.\, b^{10} : b^{20} =$

c. $\sqrt[9]{a^{18}} =$

d. $[(-b)^3]^3 =$

e. $a^{24} : a^{22} \,.\, a^4 =$

• a^2
• $(-b)^9$
• a^6
• $\sqrt{a^3 + 12}$
• b^5

119. **Apliquen propiedades de la potenciación y de la radicación. Luego, determinen los valores que le pueden corresponder a cada letra.**

a. $x \,.\, x^2 = -216$

b. $x^7 : x^5 = 121$

c. $(a^2)^2 = 81$

d. $(z^3)^4 : z^7 = -32$

e. $\sqrt{3} \,.\, \sqrt{x} = 6$

f. $\sqrt[3]{a + 3} = 2$

g. $\sqrt{\sqrt{b - 5}} = 3$

h. $\sqrt[3]{m \,.\, m} = 4$

a. $x = -6$
b. $x = 11$
c. $a = \pm 3$
d. $z = -2$
e. $x = 12$
f. $a = 5$
g. $b = 86$
h. $m = \pm 8$

2 Expresiones algebraicas y ecuaciones en Z

11. Lenguaje simbólico. Regularidades

▶ SABERES DINÁMICOS

Lenguaje coloquial y simbólico

El **lenguaje coloquial** es aquel que nos permite expresarnos a través de las palabras de nuestro idioma. La matemática utiliza un lenguaje denominado simbólico que nos permite traducir esas expresiones coloquiales.

El **lenguaje simbólico** está formado por números, símbolos y letras. Las letras se usan para representar números.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
El triple de un número	$3x$
El siguiente del doble de un número	$2n + 1$
La cuarta parte de un número	$\frac{1}{4}y$ ó $y : 4$

TIP

Cuando entre una letra y un número no se indica la operación, se entiende que existe una multiplicación.

$2x = 2 . x$

Regularidades

Las **regularidades** son una serie de elementos que tienen un patrón o regla de formación que permite determinar cuál será cada elemento según el lugar que ocupe.

Dinámica T Conecta

Ingresen en puerto.pub/regu * para ver más ejemplos de regularidades.

* Enlace acortado de https://youtu.be/SPjwfXwwa0g

Figuras de la serie	● ●	●● ●●	●●● ●●●	●●●● ●●●●
Lugar que ocupa	1	2	3	4
Cantidad de puntos	2	4	6	8

Como se ve en la tabla, la cantidad de puntos de cada elemento es siempre el doble del lugar que ocupa. Entonces, la cantidad de puntos que tienen los elementos que ocupan los lugares 5, 6, 7 y 8 son:

Lugar que ocupa	5	6	7	8
Cantidad de puntos	2 . 5 = 10	2 . 6 = 12	2 . 7 = 14	2 . 8 = 16

Se puede decir que la cantidad de puntos que tiene el elemento ubicado en el lugar "n" será igual a "2n" (**regla general**).

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Escriban en lenguaje simbólico "la suma entre el doble de un número y seis". $2x + 6$.
   b. Expresen en lenguaje coloquial la expresión simbólica $(3m)^2$. El cuadrado del triple de un número.
   c. ¿Cuál es la regla general de la serie de números: 3; 6; 9; 12...? Verifiquen su respuesta. ApAp
      La regla es 3n. Así resulta, 3 = 3 . 1; 6 = 3 . 2; 9 = 3 . 3; 12 = 3 . 4.

ACTIVIDADES

11. Lenguaje simbólico. Regularidades

1. Completen la tabla.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
El anterior del doble de un número	$2x - 1$
El triple del siguiente de un número	$3(x + 1)$
La suma entre la mitad de un número y cuatro	$x : 2 + 4$
El doble de la diferencia entre tres y un número	$2(3 - x)$
La mitad del triple de un número, aumentada en siete unidades	$3x : 2 + 7$
El doble del siguiente de un número	$2(x + 1)$
El cociente entre el anterior de un número y ocho	$(x - 1) : 8$
El cuadrado del siguiente de un número	$(x + 1)^2$

2. Completen con la expresión simbólica y luego calculen el resultado para $m = 35$.

a. El doble de "m". Expresión simbólica: $2m$ Resultado: 70

b. El siguiente de "m". Expresión simbólica: $m + 1$ Resultado: 36

c. Un quinto de "m", más 3. Expresión simbólica: $1/5 . m + 3$ Resultado: 10

d. El anterior del triple de "m". Expresión simbólica: $3m - 1$ Resultado: 104

PenCrit 3. Unan cada enunciado con la expresión que le corresponde.

a. La suma entre el doble de un número y siete. → $2m + 7$

b. El anterior de la mitad de un número. → $m : 2 - 1$

c. El doble de la suma entre un número y siete. → $2(m + 7)$

d. La mitad del anterior de un número. → $(m - 1) : 2$

4. Completen y respondan.

a. Si "3z" representa el triple de un número, ¿qué valores naturales puede valer "z" para que su triple sea menor a 16?

z puede tomar valores menores o iguales a 5.

b. Si "2n − 1" representa el anterior del doble de un número, ¿qué valores naturales puede valer "n" para que su resultado sea mayor a 11?

n puede tomar valores mayores o iguales a 7.

11. Lenguaje simbólico. Regularidades

5. Observen las series y dibujen el elemento que corresponde al lugar 4 en cada caso. Luego, completen las tablas.

a. 1 2 3 4

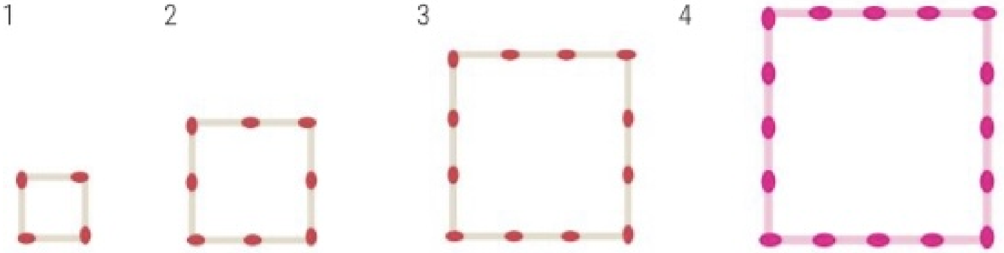


Figura	1	2	3	4	5	6	Regla general
Cantidad de fósforos	4	8	12	16	20	24	4n

b. 1 2 3 4

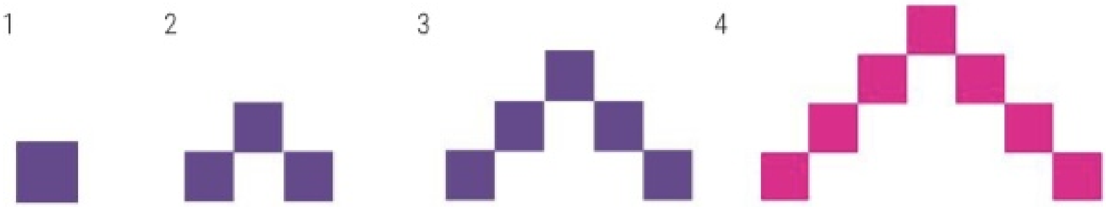


Figura	1	2	3	4	5	6	Regla general
Cantidad de cuadraditos	1	3	5	7	9	11	2n – 1

c. 1 2 3 4

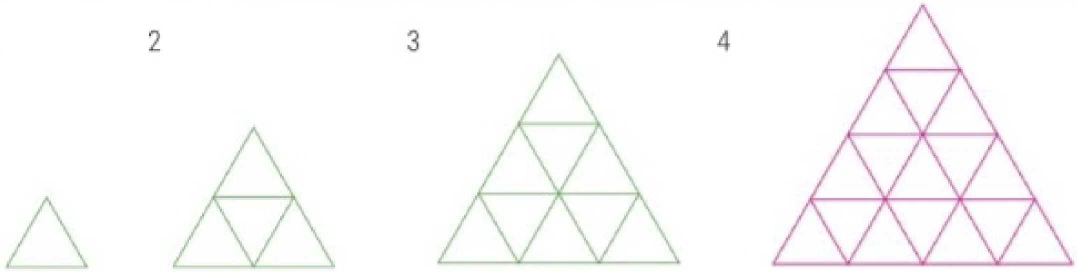


Figura	1	2	3	4	5	6	Regla general
Cantidad de triángulos	1	4	9	16	25	36	n^2

6. Completen con el número que sigue en las siguientes series numéricas y escriban la regla general para el término que ocupa el lugar "n".

a. 5; 10; 15; 20; 25; 30 ;... Regla general = 5n

b. 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15 ;... Regla general = 2n + 1

c. 2; 5; 8; 11; 14; 17 ;... Regla general = 3n – 1

d. −1; −3; −5; −7; −9; −11 ;... Regla general = −2n + 1

11. Lenguaje simbólico. Regularidades

7. Hallen la regla general de la siguiente serie numérica y respondan.

2 - 7 - 12 - 17 - 22

a. Regla general: $5x - 3$

b. ¿Qué número ocupa el décimo lugar? $5 \cdot 10 - 3 = 50 - 3 = 47$

c. ¿Qué lugar ocupa el número 72? $5x - 3 = 72 \rightarrow 5x = 72 + 3 \rightarrow x = 75 : 5 \rightarrow x = 15$

d. ¿Qué lugar ocupa el número 602? $5x - 3 = 602 \rightarrow 5x = 602 + 3 \rightarrow x = 605 : 5 \rightarrow x = 121$

8. Completen la cantidad de puntos que tiene cada figura y luego respondan.

1 2 3 4

a. ¿Cuántos puntos tiene la figura 5?

26

b. ¿Cuál es la regla general de la figura "n"?

$n^2 + 1$

c. ¿Qué lugar ocupa la figura con 50 puntos?

$n^2 + 1 = 50 \rightarrow n^2 = 50 - 1 \rightarrow n = \sqrt{49} \rightarrow n = 7$

9. Inventen una regularidad numérica compuesta por 5 números. Luego, desafíen a un compañero a encontrar la regla general del término "n".

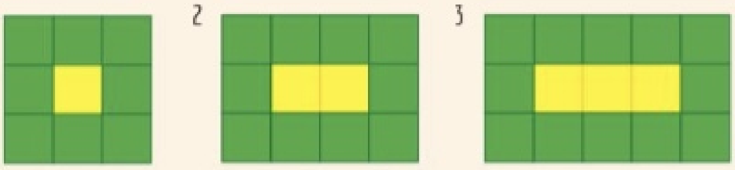
A cargo del alumno.

DinámicaMente

TracO

Reúnanse en grupos, observen la siguiente serie y dibujen la figura 4. Luego, resuelvan.

1 2 3 4



a. Tengan en cuenta la cantidad de cuadraditos verdes y encuentren la regla general del término "n". $3(n + 2) - n = 2n + 6$

b. ¿Cuántos cuadraditos verdes tendrá el término 10? ¿Qué lugar ocupa la figura que tiene 44 cuadraditos verdes?
$2 \cdot 10 + 6 = 26$; $2n + 6 = 44 \rightarrow 2n = 44 - 6 \rightarrow n = 38 : 2 \rightarrow n = 19$

12. Expresiones algebraicas

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números relacionados entre sí por una o más operaciones matemáticas.
A los números se los llama **coeficientes** y a las letras se las denomina **parte literal**.

$5pm^2$ ⟶ Coeficiente: 5. Parte literal: pm^2.

$-\frac{1}{3}x^3z + 4xz$ ⟶ Coeficientes: $-\frac{1}{3}$; 4. Parte literal: x3z; xz.

Según sea la cantidad de términos que tiene la expresión algebraica, se denominan:

- Monomio: tienen un solo término ⟶ $-3y^3$
- Binomio: tiene dos términos ⟶ $2ax^2 - 3ax$
- Trinomio: tiene tres términos ⟶ $m^3 - m + 9$
- Cuatrinomio: tiene cuatro términos ⟶ $2n - n^2 + n^3 - 1$
- A partir de 5 términos se nombra con el número de términos que tiene.

Por ejemplo: $x^7 + 2x - x^3 + 7x^2 + x4 - 2$ es un polinomio de 6 términos.

Los monomios son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal.

$4mx^2$; $3mx^2$; $\frac{1}{2}mx^2$ son tres monomios semejantes.

$-3y$; $2y$; $8y$ son tres monomios semejantes.

Para sumar o restar monomios semejantes (con la misma parte literal), se suman o restan los coeficientes y se escribe a continuación la misma parte literal.	Para multiplicar o dividir dos monomios, se multiplican o dividen los coeficientes y la parte literal.
$6m + 12m - 8m = (6 + 12 - 8)m = 10m$	$12ax^2 . 4x^3 = (12 . 4)(ax^2 . x^3) = 48ax^5$
$12x + 4y - 7x + 2y = (12 - 7)x + (4 + 2)y = 5x + 6y$	$70m^6 : 10m = (70 : 10)(m^6 : m) = 7m^5$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Escriban un monomio cuyo coeficiente sea par y la parte literal sea una vocal. Por ejemplo, 4a.
   b. ¿Cuáles de los monomios $7m^2$; $7m$ y $4m^2$ son semejantes? $7m^2$ y $4m^2$.
   c. ¿Es cierto que $4m^2 : 2m^2 = 2m^2$? No, es 2.
   ApAp d. Escriban dos ejemplos de monomios y dos de binomios. Escriban un monomio semejante a cada monomio inventado. A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

12. Expresiones algebraicas

10. Completen la tabla.

Expresión algebraica	Nombre según la cantidad de términos	Coeficientes	Parte literal
$2m^2$	Monomio	2	m^2
$3x^3 + 6m + 0{,}1z$	Trinomio	3; 6; 0,1	x^3; m; z
$-2x + \frac{1}{5}x^2$	Binomio	−2; 1/5	x; x^2
$0{,}82a$	Monomio	0,82	a
$z - 3m + 7c - x$	Cuatrinomio	1; −3; 7; −1	z; m; c; x
$\frac{2}{3}a^5$	Monomio	2/3	a^5

11. Escriban una expresión algebraica que cumpla lo pedido en cada caso.

a. Monomio con coeficiente impar. Por ejemplo, 3m.

b. Binomio con coeficientes fraccionarios. Por ejemplo, $1/2t + 2/3t^2$.

c. Monomio con coeficiente negativo y parte literal igual a "m". Por ejemplo, −5m.

d. Trinomio con coeficientes pares. Por ejemplo, 2x + 4y + 6z.

PenCrit **12.** Unan con flechas los monomios que son semejantes.

a. $2xy^2$ → $7xy^2$

b. $-x^3y^5$ → x^3y^5

c. $\frac{1}{3}x$ → $-3x$

d. $-6yx$ → $0{,}3xy$

13. Reduzcan las siguientes expresiones algebraicas resolviendo las operaciones.

a. $2m^3 + 3x - m^3 + x =$

$m^3 + 4x$

b. $8z^4 : 4z + 3z^2 - z^2 =$

$2z^3 + 2z^2$

c. $(2x) \,.\, (3xa) - x^2a =$

$6x^2a - x^2a = 5x^2a$

d. $(3a^5m - a^5m) \,.\, 2am =$

$2a^5m \,.\, 2am = 4a^6m^2$

13. Cuadrado y cubo del binomio

▶ SABERES DINÁMICOS

Cuadrado de un binomio

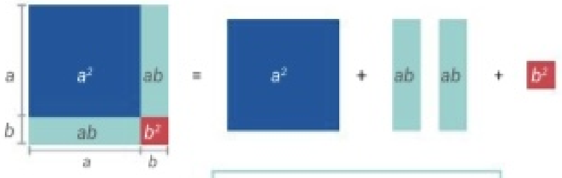
Así se resuelve el cuadrado de un binomio:

$(a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Interpretación geométrica del cuadrado de un binomio:



$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El desarrollo del **cuadrado de un binomio** es un **trinomio cuadrado perfecto**.

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \,.\, x \,.\, 3 + 3^2 \longrightarrow (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$(m - 2)^2 = m^2 + 2 \,.\, m \,.\, (-2) + (-2)^2 \longrightarrow (m - 2)^2 = m^2 - 4m + 4$

Cubo de un binomio

Así se resuelve el cubo de un binomio:

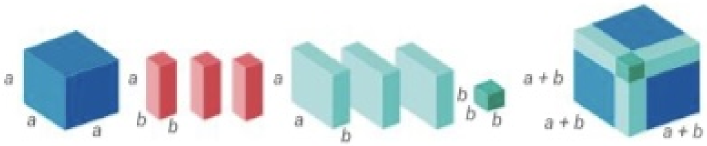
$(a + b)^3 = (a + b)\,(a + b)\,(a + b)$

$= (a^2 + ab + ba + b^2)\,(a + b)$

$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Interpretación geométrica del cubo de un binomio:



$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

El desarrollo del cubo de un binomio es un cuatrinomio cubo perfecto.

$(a + 2)^3 = a^3 + 3 \,.\, a^2 \,.\, 2 + 3 \,.\, a \,.\, 2^2 + 2^3 \longrightarrow (a + 2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

$(x - 1)^3 = x^3 + 3 \,.\, x^2 \,.\, (-1) + 3 \,.\, x \,.\, (-1)^2 + (-1)^3 \longrightarrow (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que $(z + c)^2 = z^2 + c^2$? No, es $z^2 + 2zc + c^2$.
   b. ¿Cómo se llama el desarrollo del cuadrado de un binomio? Trinomio cuadrado perfecto.
   c. Expliquen si es cierto que los coeficientes del cuatrinomio cubo perfecto siempre son positivos. No es cierto.

ApAp

ACTIVIDADES

13. Cuadrado y cubo del binomio

14. Desarrollen los siguientes cuadrados de un binomio.

a. $(x + 4)^2 =$ $x^2 + 8x + 16$

b. $(2m - 1)^2 =$ $4m^2 - 4m + 1$

c. $(a^2 + 2)^2 =$ $a^4 + 4a^2 + 4$

d. $(3x - 5)^2 =$ $9x^2 - 30x + 25$

15. Desarrollen los siguientes cubos de un binomio.

a. $(x + 3)^3 =$ $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

b. $(2m + 1)^3 =$ $8m^3 + 12m^2 + 6m + 1$

c. $(z^2 - 2)^3 =$ $z^6 - 6z^4 + 12z^2 - 8$

d. $(3x - 1)^3 =$ $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

16. Escriban los términos que faltan.

a. $(4x + \boxed{3})^2 = \boxed{16x^2} + 24x + \boxed{9}$

b. $(\boxed{b} - 2)^3 = b^3 - \boxed{6b^2} + \boxed{12b} - 8$

17. Completen con el cuadrado o cubo del binomio, según corresponda.

a. $25x^2 - 10x + 1 =$

$(5x)^2 - 2 \,.\, 5x + (-1)^2 = (5x - 1)^2$

b. $m^3 + 12m^2 + 48m + 64 =$

$m^3 + 3 \,.\, 4m^2 + 3 \,.\, 4^2m + 4^3 = (m + 4)^3$

c. $8 - 12a^2 + 6a^4 - a^6 =$

$2^3 - 3 \,.\, 2^2a^2 + 3 \,.\, 2(a^2)^2 + (a^2)^3 = (2 - a^2)^3$

d. $x^8 + 2x^4z + z^2 =$

$(x^4)^2 + 2 \,.\, x^4z + z^2 = (x^4 + z)^2$

18. Resuelvan.

a. $2b^2 + (b + 1)^2 = 2b^2 + b^2 + 2b + 1^2 =$

$3b^2 + 2b + 1$

b. $(3m - 1)^3 + 50m^2 + 8m =$

$3^3m^3 - 3 \,.\, 3^2m^2 + 3 \,.\, 3m - 1^3 + 50m^2 + 8m =$

$27m^3 - 27m^2 + 9m - 1 + 50m^2 + 8m =$

$27m^3 + 23m^2 + 17m - 1$

c. $x^2 - (-2 - x)^2 + 5x = x^2 - [(-2)^2 - 2 \,.\, (-2)x + x^2] + 5x =$

$x^2 - (4 + 4x + x^2) + 5x =$

$x^2 - 4 - 4x - x^2 + 5x = x - 4$

d. $2a + (a + 1)^3 = 2a + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 =$

$a^3 + 3a^2 + 5a + 1$

e. $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 =$

$(2x)^2 - 2 \,.\, 2x + 1^2 + (2x)^2 + 2 \,.\, 2x + 1^2 =$

$4x^2 - 4x + 1 + 4x^2 + 4x + 1 =$

$8x^2 + 2$

f. $(1 - m)^3 - (m + 1)^3 =$

$1^3 - 3 \,.\, 1^2m + 3 \,.\, 1m^2 - m^3 - [m^3 + 3 \,.\, m^2 \,.\, 1 + 3 \,.\, m \,.\, 1^2 + 1^3] =$

$1 - 3m + 3m^2 - m^3 - m^3 - 3m^2 - 3m - 1 = -2m^3 - 6m$

14. Ecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **ecuación** es una igualdad en la que hay un valor desconocido llamado incógnita.

$2x - 8 = 7$ $\quad\quad$ $12 + 3m = m + 1$

Resolver una ecuación es encontrar el o los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Esos valores encontrados forman el conjunto solución.

$x + 8 = 20$ $\quad$ $12 + 8 = 20 \longrightarrow$ $x = 12$ *es la solución de la ecuación*

Verificar la igualdad es reemplazar la incógnita por el valor obtenido y comprobar que se cumpla la igualdad.

Siguiendo con el ejemplo anterior: 12 + 8 = 20 ⟶ 20 = 20 la igualdad es verdadera.

Para **resolver una ecuación** se deben tener en cuenta las propiedades que permiten obtener **ecuaciones equivalentes**, es decir, que tienen el mismo **conjunto solución**.

- Si se suma o se resta el mismo número en ambos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

$x + 3 = 14$ $\quad\quad$ $x - 1 = 15$

$x + 3 - 3 = 14 - 3$ $\quad\quad$ $x - 1 + 1 = 15 + 1$

$x = 11$ $\quad\quad$ $x = 16$

Verificación: $11 + 3 = 14$ $\quad\quad$ *Verificación:* $16 - 1 = 15$

- Si se multiplican o dividen (por un número distinto de cero) ambos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

$3x = 12$ $\quad\quad$ $x : 5 = 7$

$3x : 3 = 12 : 3$ $\quad\quad$ $x : 5 . 5 = 7 . 5$

$x = 4$ $\quad\quad$ $x = 35$

Verificación: $3 . 4 = 12$ $\quad\quad$ *Verificación:* $35 : 5 = 7$

- En algunos casos se puede aplicar primero la propiedad distributiva y luego resolver.

$2(x + 1) = 6$

$2x + 2 = 6$ ⟵ Se aplica la propiedad distributiva.

$2x + 2 - 2 = 6 - 2$ ⟵ Se resta 2 a ambos miembros.

$2x = 4$

$2x : 2 = 4 : 2$ ⟵ Se divide por 2 ambos miembros.

$x = 2$ ⟵ Se encuentra la solución de la ecuación.

Dinámica T Conecta

Ingresen en puerto.pub/ecu* para ver más ejemplos de resolución de ecuaciones.

* Enlace acortado de https://youtu.be/4AixPIIV05E

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. La expresión 2x + 1 ¿es una ecuación? No, ya que no hay una igualdad.
   b. ¿Se puede aplicar la propiedad distributiva en la ecuación 2 : (8x + 1) = 4? No se puede.
   c. La ecuación 2m + 6 = 8 ¿es equivalente a la ecuación m + 3 = 4? Sí, son equivalentes.
   d. ¿Cuántas ecuaciones equivalentes a una ecuación se pueden obtener? Infinitas.

ApAp

ACTIVIDADES

14. Ecuaciones

PenCrit

19. Marquen con una X las expresiones que corresponden a una ecuación.

a. $2x - 1 = x$	X	d. $x + 5 = 1$	X
b. $-3m^2 + 9 = 0$	X	e. $5c - 2 =$	
c. $2a - 8 =$		f. $z + 5 = 9$	X

20. Encierren en un círculo el número que es la solución de la ecuación sin resolverla.

a. $7x - 9 - x = 9$	(3)	6	8
b. $3x - 5 = 13$	3	2	(6)
c. $4x + x = 25$	(5)	−1	9
d. $x : 5 = 2$	4	(10)	2
e. $9(x + 2) = 18$	1	7	(0)
f. $7x - 4x + 1 = 4$	7	(1)	5

21. Resuelvan y verifiquen las siguientes ecuaciones.

a. $2(x - 1) + 5 = 9$

$2x - 2 + 5 = 9$

$2x = 9 + 2 - 5$

$x = 6 : 2$

$x = 3$

b. $2m + 7(m - 1) = 2$

$2m + 7m - 7 = 2$

$9m = 2 + 7$

$m = 9 : 9$

$m = 1$

c. $-26 + 6 = 5(b + 2)$

$-20 = 5b + 10$

$-20 - 10 = 5b$

$-30 : 5 = b$

$b = -6$

d. $(16x + 8) : 8 - 1 = 14$

$2x + 1 - 1 = 14$

$2x = 14$

$x = 14 : 2$

$x = 7$

e. $2(e + 3) - 2 = 6(e - 10)$

$2e + 6 - 2 = 6e - 60$

$4 = 6e - 60 - 2e$

$4 + 60 = 4e$

$64 : 4 = e$

$e = 16$

f. $5(x + 1) - 2(x - 2) = 18$

$5x + 5 - 2x + 4 = 18$

$3x + 9 = 18$

$3x = 18 - 9$

$x = 9 : 3$

$x = 3$

g. $(6m + 12) : 2 - 1 = m + 7$

$3m + 6 - 1 = m + 7$

$3m - m = 7 - 6 + 1$

$2m = 2$

$m = 2 : 2$

$m = 1$

h. $10 - 3(d - 1) = d + 1$

$10 - 3d + 3 = d + 1$

$10 + 3 - 1 = d + 3d$

$12 = 4d$

$12 : 4 = d$

$d = 3$

14. Ecuaciones

22. Traduzcan al lenguaje simbólico. Luego, encuentren cuál es el número en cada caso.

a. El doble de la suma entre un número y 5 es igual a 8.

$2(x + 5) = 8$

$2x + 10 = 8$

$2x = 8 - 10$

$x = -2 : 2 \rightarrow x = -1$

b. La diferencia entre el triple de un número y el anterior a 5 es igual al doble de 4.

$3y - (5 - 1) = 2 . 4$

$3y - 4 = 8$

$3y = 8 + 4$

$y = 12 : 3 \rightarrow y = 4$

c. La mitad de la suma entre 10 y el doble de un número es igual 6.

$(10 + 2z) : 2 = 6$

$5 + z = 6$

$z = 6 - 5$

$z = 1$

d. El producto entre 6 y el siguiente de un número es igual al doble del anterior del número.

$6 . (x + 1) = 2 . (x - 1)$

$6x + 6 = 2x - 2$

$6x - 2x = -2 - 6$

$4x = -8 \rightarrow x = -8 : 4 \rightarrow x = -2$

e. El quíntuplo del anterior de un número es igual a 15.

$5 . (y - 1) = 15$

$5y - 5 = 15$

$5y = 15 + 5$

$y = 20 : 5 \rightarrow y = 4$

f. La suma entre un número y el cubo de 2 es igual al triple del número disminuido en dos unidades.

$z + 2^3 = 3z - 2$

$8 + 2 = 3z - z$

$10 = 2z$

$10 : 2 = z \rightarrow z = 5$

Comu **23. Resuelvan la siguiente ecuación sin aplicar la propiedad distributiva. Compartan con sus compañeros cómo lo hicieron.**

$$6(x + 1) = 12$$

$x + 1 = 12 : 6$

$x = 2 - 1$

$x = 1$

24. Escriban una ecuación que tenga por solución lo pedido en cada caso.

a. $x = 1$

Por ejemplo: $2x + 3 = 5$.

b. $m = 4$

Por ejemplo: $3m + 1 = 13$.

14. Ecuaciones

25. Resuelvan las siguientes ecuaciones sin aplicar la propiedad distributiva.

a. $5 . (x - 1) = 20$

$x - 1 = 20 : 5$

$x = 4 + 1$

$x = 5$

b. $(3x + 1) : 2 = 5$

$3x + 1 = 5 . 2$

$3x = 10 - 1$

$x = 9 : 3$

$x = 3$

c. $(17 - x) : 6 = 1$

$17 - x = 1 . 6$

$17 - x = 6$

$17 - 6 = x$

$x = 11$

d. $1 = (4x + 3) : 7$

$1 . 7 = 4x + 3$

$7 - 3 = 4x$

$4 : 4 = x$

$x = 1$

26. Planteen la ecuación. Luego, resuélvanla.

a. El perímetro de un rectángulo de base igual a $(x + 2)$ cm y altura igual a $(x - 1)$ cm es igual a 6.

$2 . (x + 2) + 2 . (x - 1) = 6 \rightarrow 2x + 4 + 2x - 2 = 6 \rightarrow$

$4x + 2 = 6 \rightarrow 4x = 6 - 2 \rightarrow x = 4 : 4 \rightarrow x = 1$

b. La suma entre el doble de un ángulo que mide "x" y el suplemento del ángulo es igual a 300°.

$2x + (180° - x) = 300° \rightarrow 2x + 180° - x = 300°$

$\rightarrow x = 300° - 180° \rightarrow x = 120°$

c. El perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide $(4x - 1)$ cm es igual a 33 cm.

$3 . (4x - 1) = 33 \rightarrow 12x - 3 = 33 \rightarrow$

$12x = 33 + 3 \rightarrow x = 36 : 12 \rightarrow x = 3$

d. La diferencia entre el triple de un ángulo que mide "2x" y el doble del complemento del ángulo es igual a 70°.

$3 . 2x - 2 . (90° - 2x) = 70° \rightarrow 6x - 180° + 4x = 70°$

$\rightarrow 10x = 70° + 180° \rightarrow x = 250° : 10 \rightarrow x = 25°$

27. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a. $m = 1$ es solución de la ecuación: $7(m - 1) + 2m = 2$ — V

b. $x = 3$ es solución de la ecuación: $2(x - 1) + 6(x + 2) = 8$ — F

$x = -1/4$

c. $z = 0$ es solución de la ecuación: $5(3z + 4) - 1 = 19$ — V

d. $a = 4$ es solución de la ecuación: $8 = 4(a - 1) - 4$ — V

28. **Traduzcan al lenguaje simbólico.**

a. El doble de un número, aumentado en 3 unidades. $2x + 3$

b. La diferencia entre el siguiente de un número y 4. $(x + 1) - 4$

c. La mitad de la suma entre 4 y un número. $(4 + x) : 2$

d. La suma de dos números consecutivos. $x + (x + 1)$

e. El triple del anterior de un número. $3 . (x - 1)$

f. El anterior del doble de un número. $2x - 1$

g. El siguiente de la mitad de un número. $x : 2 + 1$

h. El doble de la suma entre el triple de un número y 8. $2 . (3x + 8)$

29. **Escriban en lenguaje coloquial.**

a. $3(x + 1)$ El triple del siguiente de un número.

b. $4x - 1$ El anterior del cuádruple de un número.

c. $x + 2(x - 1)$ La suma entre un número y el doble del anterior de ese número.

d. $(7 + x) : 2$ La mitad de la suma entre 7 y un número.

e. $4(2x - 1)$ El cuádruple del anterior del doble de un número.

f. $x + (x + 1) + (x + 2)$ La suma de tres números consecutivos.

30. **Observen la regla general para el término "n" y escriban los cinco primeros números de la serie.**

a. $8n$ 8; 16; 24; 32; 40

b. $-2n + 3$ 1; −1; −3; −5; −7

c. n^3 1; 8; 27; 64; 125

d. $(n + 1) : 2$ 1; 3/2; 2; 5/2; 3

31. **Completen con el número que sigue a cada serie y escriban la regla general para el término "n".**

a. 2; 4; 6; 8; 10 ;... Regla general = $2n$

b. 2; 5; 8; 11; 14 ;... Regla general = $3n - 1$

c. 1; 4; 9; 16; 25 ;... Regla general = n^2

d. 3; 6; 11; 18; 27 ;... Regla general = $n^2 + 2$

32. **Hallen el término pedido de cada serie numérica.**

a. 8.° término de la serie 0; 3; 6;... 21

b. 11.° término de la serie 5; 10; 15;... 55

c. 7.° término de la serie 3; 12; 21;... 57

d. 35.° término de la serie 7; 13; 19;... 211

e. 15.° término de la serie 4; 5; 6;... 18

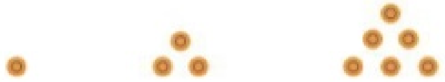
f. 7.° término de la serie −1; −4; −7;... −19

33. **Dibujen la figura que sigue a cada serie.**

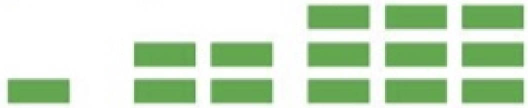
A cargo del alumno.

a. 1 2 3

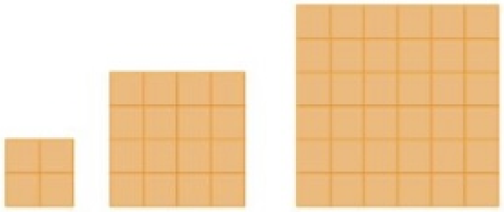
b. 1 2 3



c. 1 2 3



d. 1 2 3



34. Completen la tabla.

Expresión algebraica	Nombre según la cantidad de términos	Coeficientes	Parte literal
$5x + 8y$	Binomio	5; 8	x, y
$0{,}9z^2m^4$	Monomio	0,9	z^2m^4
$-2y + c + 3a^2$	Trinomio	−2; 1; 3	y; c; a^2
$5z + 2x - y + p$	Cuatrinomio	5; 2; −1; 1	z; x; y; p

35. Reduzcan las siguientes expresiones algebraicas.

a. $2xy + 5xy - 3xy =$ $4xy$

b. $m^2 + xm + 6m^2 =$ $7m^2 + xm$

c. $3x^3z + 2m - x^3z + 8m =$ $2x^3z + 10m$

d. $4h + 3z - 2h + y + 7y - 2z =$ $2h + 8y + z$

36. Desarrollen los siguientes cuadrados de binomios.

a. $(x + 5)^2 =$ $x^2 + 10x + 25$

b. $(2m^3 - 3)^2 =$ $4m^6 - 12m^3 + 9$

c. $(1 + 5a)^2 =$ $1 + 10a + 25a^2$

d. $(-x - 3)^2 =$ $x^2 + 6x + 9$

37. Completen los siguientes cubos de binomios.

a. $(m +$ [2] $)^3 =$ [m^3] + [$6m^2$] + [$12m$] + 8

b. ([x^2] $- 1)^3 = x^6 -$ [$3x^4$] + [$3x^2$] − [1]

c. $(2x + 3)^3 =$ [$8x^3$] + [$36x^2$] + [$54x$] + [27]

d. ([4] + [z] $)^3 = 64 +$ [$48z$] + [$12z^2$] $+ z^3$

38. Indiquen cuáles de las siguientes expresiones corresponden a una ecuación. La b. y la d.

a. $3 + 18 = 9 + 12$

b. $2m + 1 = 5$

c. $7x - 2 + 5x =$

d. $7y^2 - 1 = 48$

39. Desarrollen y reduzcan las expresiones.

a. $(m + 5)^2 + 7m - 12 =$ $m^2 + 17m + 13$

b. $1 - (2x + 3)^2 =$ $-4x^2 - 12x - 8$

c. $2b + (b^2 - 1)^2 + 5b^4 - 1 =$ $6b^4 - 2b^2 + 2b$

d. $(a + 1)^2 + (a - 1)^3 =$ $a^3 - 2a^2 + 5a$

40. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $2(m - 1) + 3(2 + m) = 9$ $m = 1$

b. $(a + 1)^2 - a^2 = 5$ $a = 2$

c. $(15x - 10) : 5 = x + 8$ $x = 5$

d. $2(3 - x) - 2(x + 5) = 6 - 5x$ $x = 10$

e. $4(6y + 12) : 2 - 4 = 4y + 28$ $y = 1$

41. Inventen una ecuación que cumpla lo pedido.
A cargo del alumno.

a. Tiene propiedad distributiva y la solución es $x = 3$.

b. Tiene cuadrado de un binomio y su solución es $m = 5$.

42. Traduzcan al lenguaje simbólico. Luego, resuelvan.

a. El doble del anterior de un número es igual a 30. ¿Cuál es el número?
$2 \,.\, (x - 1) = 30$ $x = 16$

b. La suma entre dos números consecutivos es igual a 45. ¿De qué números se trata?
$x + (x + 1) = 45$ 22 y 23

c. La diferencia entre el triple de un número y la mitad del mismo número es igual a 20. ¿Cuál es el número?
$3x - x : 2 = 20$ $x = 8$

d. El siguiente del triple de un número es igual a 22. ¿Cuál es el número?
$3x + 1 = 22$ $x = 7$

e. El cociente entre el anterior del doble de un número y 3 es igual a 11. ¿De qué número se trata?
$(2x - 1) : 3 = 11$ $x = 17$

f. El producto entre el siguiente de un número y 6 es igual al anterior de 13. ¿Cuál es el número?
$(x + 1) \,.\, 6 = 13 - 1$ $x = 1$

g. La suma de tres números consecutivos es igual a 183. ¿Cuáles son los números?
$x + x + 1 + x + 2 = 183$ 60, 61 y 62

15. Ecuaciones con potenciación y radicación

▶ SABERES DINÁMICOS

Para resolver ecuaciones en las cuales la incógnita está afectada por un exponente, al momento de despejarla se debe tener en cuenta si este es par o impar.

Con exponente "n" par	Con exponente "n" impar
Recordar: $\sqrt[n]{x^n} = \lvert x \rvert$, si n es par	**Recordar:** $\sqrt[n]{x^n} = x$, si n es impar
Ejemplo:	**Ejemplo:**
$x^4 - 15 = 1$	$x^3 + 10 = -17$
$x^4 = 1 + 15$	$x^3 = -17 - 10$
$x^4 = 16$	$x^3 = -27$
$\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{16}$	$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-27}$
$\lvert x \rvert = 2$	$x = -3$
$x = 2$ o $x = -2$	$x = -3$

Las ecuaciones en las cuales la incógnita está afectada por una raíz, se pueden resolver del siguiente modo:

$$\sqrt{x} + 2 = 5$$
$$\sqrt{x} = 5 - 2$$
$$\sqrt{x} = 3$$
$$(\sqrt{x})^2 = 3^2$$
$$x = 9$$

$$\sqrt[5]{x} + 6 = 8$$
$$\sqrt[5]{x} = 8 - 6$$
$$\sqrt[5]{x} = 2$$
$$(\sqrt[5]{x})^5 = 2^5$$
$$x = 32$$

Áreas dinámicas [Matemática y Físico-Química]

En la Física se utilizan fórmulas que permiten realizar un cálculo específico y según los datos que se tengan y lo que se desee calcular, estas se transforman en ecuaciones a resolver. Un ejemplo de esto es la fórmula de la ley gravitacional universal: $F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$, donde **G** es "gravedad". La fuerza "F" con que se atraen dos objetos es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia "d" que los separa. Esto significa que dos cuerpos cualesquiera se atraen con una fuerza mayor o menor según su masa sea mayor o menor, y según la distancia entre ellos.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es correcto decir que la ecuación $x^2 + 16 = 0$ no tiene solución real? Sí, no existe solución real de $\sqrt{-16}$.
   b. ¿Es cierto que la ecuación $(x + 1)^2 = 25$ tiene una sola solución? No, tiene 2 soluciones: 4 y −6.
   c. ¿Qué expresión se obtiene al despejar "a" de la siguiente fórmula? $D = vt + 0{,}5at^2$ $a = (D - Vt) : (0{,}5t^2)$

ApAp

ACTIVIDADES

15. Ecuaciones con potenciación y radicación

43. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 15 = 1$

$x^2 = 1 + 15$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

b. $\sqrt{m + 1} - 3 = 1$

$\sqrt{m + 1} = 1 + 3$

$m + 1 = 4^2$

$m = 16 - 1$

$m = 15$

c. $(2a - 1)^4 - 1 = 0$

$(2a - 1)4 = 0 + 1$

$2a - 1 = \pm\sqrt[4]{1}$

$2a = \pm 1 + 1$

$a = (\pm 1 + 1) : 2 \rightarrow a = 1; a = 0$

d. $(x - 3)^2 : 5 = 5$

$(x - 3)^2 = 5 . 5$

$x - 3 = \pm\sqrt{25}$

$x = \pm 5 + 3$

$x = 8; x = -2$

e. $2 . (z - 6) + z^3 = 2z - 20$

$2z - 12 + z^3 = 2z - 20$

$2z - 2z + z^3 = -20 + 12$

$z = \sqrt[3]{-8}$

$z = -2$

f. $3 . \sqrt[3]{x} - 9 = 12$

$3 . \sqrt[3]{x} = 12 + 9$

$\sqrt[3]{x} = 21 : 3$

$x = 7^3$

$x = 343$

g. $\sqrt{169} - (m + 1)^2 = -12 - m^2$

$13 - (m^2 + 2m + 1) = -12 - m^2$

$13 - m^2 - 2m - 1 = -12 - m^2$

$13 - 1 + 12 = -m^2 + m^2 + 2m$

$24 = 2m \rightarrow 24 : 2 = m \rightarrow m = 12$

h. $\sqrt[5]{32x} - 12^0 = 1$

$\sqrt[5]{32} . \sqrt[5]{x} - 1 = 1$

$2 . \sqrt[5]{x} = 1 + 1$

$\sqrt[5]{x} = 2 : 2$

$x = 1^5 \rightarrow x = 1$

44. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. La ecuación $3x^2 - 3 = 0$ tiene una sola solución. F

Tienen dos soluciones: 1 y −1.

b. $x = 4$ es la única solución de la ecuación $x^3 - 64 = 0$. V

$x^3 = 0 + 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} \rightarrow x = 4$

45. Inventen una ecuación que tenga dos soluciones. Luego, resuélvanla.

Por ejemplo, $x^2 = 25$.

16. Problemas con ecuaciones

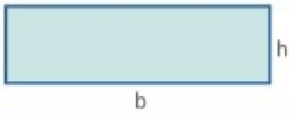
▶ SABERES DINÁMICOS

Hay problemas que se pueden resolver planteando una **ecuación**.

Algunas recomendaciones para plantear la ecuación correspondiente al problema:

- Comprender el problema: ¿Con qué datos se cuenta? ¿Puedo dibujar el problema? ¿Qué es lo que hay que encontrar y con qué letra voy a designar la incógnita?
- Buscar la estrategia para resolverlo: ¿Cuál es la ecuación correspondiente que relaciona los datos con la incógnita y permite hallar lo pedido?
- Resolver y comprobar: ¿Es correcta la solución? ¿Cuál es la respuesta del problema?

Problema 1: ¿Cuánto mide la base de un rectángulo cuya área es igual a 216 cm², sabiendo que su altura es igual a dos tercios de la base?

Datos	Área del rectángulo: $216\ cm^2$ $h = \frac{2}{3}\ b$ 
Planteo y resolución de la ecuación	$216\ cm^2 = b\ .\ h$ $216\ cm^2 = b\ .\ \frac{2}{3}\ b \longrightarrow 216\ cm^2 = \frac{2}{3}\ b^2$ (es "h") $216\ cm^2 : \frac{2}{3} = b^2$ $324\ cm^2 = b^2$ $\sqrt{324\ cm^2} = \lvert b \rvert$ $18\ cm = \lvert b \rvert \longrightarrow b = \pm\ 18\ cm$
Decidir y escribir la respuesta del problema	El problema pide la medida de un lado, por lo que la respuesta es el valor positivo obtenido. Respuesta: la base del rectángulo mide 18 cm.

TIP

El área de un rectángulo (A) se calcula haciendo "base (b) . altura (h)".

Problema 2: Mario tiene el doble de edad que Ana y sus edades juntas suman 33. ¿Qué edad tienen Ana y Mario?

Datos	$M = 2A$ M: edad de Mario $A + M = 33$ A: edad de Ana
Planteo y resolución de la ecuación	$A + 2A = 33$ $3A = 33$ $3A : 3 = 33 : 3$ $A = 11$ $M = 2A \longrightarrow M = 2\ .\ 11 \longrightarrow M = 22$
Decidir y escribir la respuesta del problema	Respuesta: Ana tiene 11 años y Mario, 22 años.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. El perímetro de un cuadrado es igual a 8 cm y está pintado de rosa. ¿Toda la información es un dato útil para hallar la medida del lado?
   b. ¿Todas las soluciones de la ecuación planteada son siempre la respuesta del problema?
   c. Lean el enunciado y piensen otra relación entre el peso de las manzanas y el de las peras para que se pueda plantear y resolver un problema.
   "Juan compró 3 kilos de frutas entre manzanas y peras."

ApAp

a. No, el color no es un dato necesario.
b. No. Por ejemplo, si se habla de la edad de personas, el resultado no puede ser negativo.
c. A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

16. Problemas con ecuaciones

PenCrit **46. Marquen con una X la ecuación correspondiente a cada problema. Luego, resuélvanlos.**

a. La remisería "Buen viaje" cobra una suma fija de \$120 más \$25 por cada kilómetro recorrido y Juan pagó \$395 por un viaje de "x" kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrió en el viaje?

$120 + 395 = 25x$ ☐ $395 = 120 + 25x$ ☒ $395 = (120 + 25)x$ ☐

$395 - 120 = 25x \rightarrow 275 : 25 = x \rightarrow x = 11$ Recorrió 11 km.

b. En el salón comedor de una escuela la cantidad de sillas es igual al triple de la cantidad de mesas, más 28. El total de muebles entre sillas y mesas es de 120. ¿Cuántas sillas y cuántas mesas hay?

$120 + 28 = x + 3x$ ☐ $3 \,.\, (x + 28) = 120$ ☐ $x + 3x + 28 = 120$ ☒

x: cantidad de sillas; y: cantidad de mesas

$x + y = 120 \rightarrow x + 3x + 28 = 120 \rightarrow 4x = 120 - 28 \rightarrow x = 92 : 4 \rightarrow x = 23$

$y = 120 - x \rightarrow y = 120 - 23 \rightarrow y = 97$ Hay 23 sillas y 97 mesas.

c. La mitad de la diferencia entre el doble de un número y 6 es igual a 8. ¿Cuál es ese número?

$2x - 6 : 2 = 9$ ☐ $2 : (2x - 6) = 8$ ☐ $(2x - 6) : 2 = 8$ ☒

$x - 3 = 8 \rightarrow x = 8 + 3 \rightarrow x = 11$ El número es 11.

47. Planteen la ecuación y resuelvan.

a. El cuadrado del siguiente de un número es igual a la raíz cúbica de 64. ¿Qué números son?

$(x + 1)^2 = \sqrt[3]{64} \rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2 - 1 \rightarrow x = -3; x = 1$

Los números son −3 y 1.

b. La raíz cuadrada de la suma entre un número y su anterior es igual a 5. ¿De qué número se trata?

$\sqrt{x + x - 1} = 5 \rightarrow 2x - 1 = 5^2 \rightarrow 2x = 25 + 1 \rightarrow x = 26 : 2 \rightarrow x = 13$

El número es 13.

c. La mitad de la diferencia entre el doble de un número y el cuadrado de 2 es igual al opuesto de −6. ¿Cuál es el número?

$(2x - 2^2) : 2 = -(-6) \rightarrow (2x - 4) : 2 = 6 \rightarrow x - 2 = 6 \rightarrow x = 6 + 2 \rightarrow x = 8$

El número es 8.

d. La suma entre tres números naturales consecutivos es igual a 36. ¿Qué números son?

$x + x + 1 + x + 2 = 36 \rightarrow 3x + 3 = 36 \rightarrow 3x = 36 - 3 \rightarrow x = 33 : 3 \rightarrow x = 11$

Los números son 11, 12 y 13.

16. Problemas con ecuaciones

48. Resuelvan los siguientes problemas de edades.

a. Las edades de Sergio y Nicolás suman 53 años. La edad de Sergio es 11 años más que la de Nicolás. ¿Qué edad tiene cada uno ahora mismo?

$n + s = 53$; $s = n + 11 \rightarrow n + n + 11 = 53 \rightarrow 2n = 53 - 11 \rightarrow n = 42 : 2 \rightarrow n = 21$

$s = 21 + 11 \rightarrow s = 32$ Nicolás tiene 21 años y Sergio 32 años.

b. La madre de Valentina tiene 43 años. Esta edad es cuatro años más que el triple de la edad de su hija. ¿Qué edad tiene Valentina?

$m = 43$; $m = 3v + 4 \rightarrow 43 = 3v + 4 \rightarrow 43 - 4 = 3v \rightarrow 39 : 3 = v \rightarrow v = 13$

Valentina tiene 13 años.

c. Sofía tiene 61 años y su hijo tiene 37 años. ¿Hace cuántos años la edad de Sofía era el triple que la de su hijo?

$s = 61$; $h = 37 \rightarrow s - x = 3 \,.\, (h - x) \rightarrow 61 - x = 3 \,.\, (37 - x) \rightarrow 61 - x = 111 - 3x \rightarrow -x + 3x = 111 - 61$

$\rightarrow 2x = 50 \rightarrow x = 50 : 2 \rightarrow x = 25$ Hace 25 años.

49. Tengan en cuenta los datos dados de cada figura y calculen lo pedido.

a. Área del rectángulo mnop.

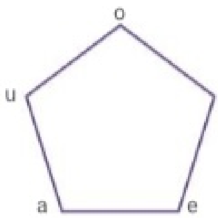
Perímetro del rectángulo mnop: 24 cm.
La base es igual al doble de la altura.

$2b + 2h = 24$ cm; $b = 2h \rightarrow 2 \,.\, 2h + 2h = 24$ cm $\rightarrow 4h + 2h = 24$ cm $\rightarrow 6h = 24$ cm $\rightarrow$

$h = 24$ cm $: 6 \rightarrow h = 4$ cm $b = 2 \,.\, 4$ cm $= 8$ cm área $= b \,.\, h \rightarrow$ área $= 8$ cm $.\ 4$ cm $= 32$ cm^2

Base = 8 cm; altura = 4 cm; área = 32 cm^2

b. Perímetro del pentágono regular aeiou.



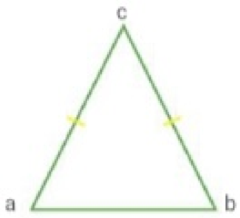
$\overline{ae} = x + 2$ cm
$\overline{ou} = 2x - 1$ cm

$\overline{ae} = \overline{ou} \rightarrow x + 2$ cm $= 2x - 1$ cm $\rightarrow 2$ cm $+ 1$ cm $= 2x - x \rightarrow x = 3$ cm

$\overline{ae} = 3$ cm $+ 2$ cm $= 5$ cm perímetro $= 5 \,.\, 5$ cm $= 25$ cm

Lado = 5 cm; perímetro = 25 cm

c. Área del triángulo isósceles abc.



Perímetro del triángulo: 16 cm
$\overline{ab} = x + 1$ cm
$\overline{ac} = x$ cm

perímetro: 16 cm $\rightarrow \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac} = 16$ cm $\rightarrow x + 1$ cm $+ x + x = 16$ cm $\rightarrow 3x + 1$ cm $= 16$ cm $\rightarrow 3x = 16$ cm $- 1$ cm

$\rightarrow x = 15$ cm $: 3 \rightarrow x = 5$ cm

$(3\text{ cm})^2 + h^2 = (5\text{ cm})^2 \rightarrow 9\text{ cm}^2 + h^2 = 25\text{ cm}^2 \rightarrow h^2 = 25\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2 \rightarrow h = \sqrt{16\text{ cm}^2} \rightarrow h = 4$ cm

área $= (b \,.\, h) : 2 = (6$ cm $.\ 4$ cm$) : 2 = 12$ cm^2

16. Problemas con ecuaciones

50. Resuelvan y escriban la respuesta.

a. Entre Marcelo y Marina tienen \$3 455. Marina tiene \$65 más que el doble del dinero que tiene Marcelo. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

$M + m = \$3455$; $m = 2M + \$65 \rightarrow M + 2M + \$65 = \$3455 \rightarrow 3M = \$3455 - \$65 \rightarrow M = \$3390 : 3 \rightarrow M = \$1130 \rightarrow$

$m = 2 . \$1130 + \$65 \rightarrow m = \$2260 + \$65 \rightarrow m = \$2325$

Marcelo tiene \$1 130 y Marina \$2 325.

b. La cantidad de lápices rojos que hay en una caja equivale al doble que hay de azules, y de color verde hay el triple que rojos y azules juntos. Si en total son 312 lápices, ¿cuántos lápices hay de cada color?

$r = 2a$; $v = 3 (r + a)$; $r + a + v = 312 \rightarrow r + a + 3 . (r + a) = 312 \rightarrow 2a + a + 3 . (2a + a) = 312 \rightarrow 3a + 3 . (3a) = 312 \rightarrow 3a + 9a = 312$

$\rightarrow 12a = 312 \rightarrow a = 312 : 12 \rightarrow a = 26$

$r = 2 . 26 = 52$; $v = 3 . (52 + 26) = 3 . 78 = 234$ Hay 26 lápices azules, 52 rojos y 234 verdes.

c. Una clínica compra 250 paquetes de algodón, 320 jeringas y 240 paquetes de gasa. Se paga en total \$35 090. Si cada paquete de algodón cuesta \$20 más que cada jeringa y cada paquete de gasa cuesta \$21 más que cada paquete de algodón, ¿cuánto cuesta cada producto?

$a = j + \$20$; $g = a + \$21$; $250a + 320j + 240g = \$35090 \rightarrow 250a + 320j + 240g = \$35090 \rightarrow 250 . (j + \$20) + 320j + 240 . (a + \$21) = \$35090 \rightarrow$

$250j + \$5000 + 320j + 240 . (j + \$20 + \$21) = \$35090 \rightarrow 250j + \$5000 + 320j + 240j + \$4800 + \$5040 = \$35090 \rightarrow 810j + \$14840 = \$35090 \rightarrow$

$810j = \$35090 - \$14840 \rightarrow j = \$20250 : 810 \rightarrow j = \$25$; $a = \$45$; $g = \$66$

Cada jeringa cuesta \$25, cada paquete de algodón, \$45 y cada paquete de gasa, \$66.

PenCrit **51. Lean atentamente y resuelvan.**

Lucía trabaja en un negocio que alquila juegos para la computadora. El negocio ofrece asociarse por una cuota anual de \$120, de manera que el alquiler sea más barato para los socios. El precio de alquiler para los socios es de \$35 y para no socios es de \$47.

a. El año pasado Gaspar era socio y gastó \$960 incluyendo esa cuota. ¿Cuánto hubiera gastado sin ser socio alquilando la misma cantidad de juegos?

$\$120 + \$35x = \$960 \rightarrow \$35x = \$960 - \$120 \rightarrow x = \$840 : \$35 \rightarrow x = 24$

$\$47 . 24 = \$1128$

Hubiera pagado \$1 128.

b. El año pasado Ana, que no es socia, alquiló 16 juegos. ¿Le hubiese convenido ser socia?

$\$120 + \$35 . 16 = \$120 + \$560 = \$680$

$\$47 . 16 = \$752$

Sí, hubiese pagado \$680 en vez de \$752

c. ¿Por cuántos juegos alquilados un socio paga igual que un no socio?

c. $\$120 + \$35x = \$47x \rightarrow \$120 = \$47x - \$35x \rightarrow \$120 = \$12x \rightarrow \$120 : \$12 = x \rightarrow x = 10$

Por 10 juegos.

17. Inecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que los dos miembros se relacionan por los signos: $>$ (mayor), $\geq$ (mayor o igual), $<$ (menor) o $\leq$ (menor o igual).

$$3x - 1 > 6 \qquad 2(x + 3) \geq 0 \qquad 2 - 9x < 5 \qquad (x + 4) : 2 \leq 8$$

Resolver una inecuación es encontrar los valores de la incógnita que verifican la desigualdad.

Para ello se debe tener en cuenta:

- **Al sumar o restar la misma cantidad a los dos miembros de una inecuación, la desigualdad no varía.**
- **Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número positivo, la desigualdad no varía.**
- **Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.**

$$4x + 6 < 10$$
$$4x + 6 - 6 < 10 - 6$$
$$4x < 4$$
$$4x : 4 < 4 : 4$$
$$x < 1$$

↓

Las soluciones son todos los números menores que 1.

↓

Conjunto solución

$C_0 = \{...; -3; -2; -1, 0\}$

$$-2x + 4 \leq 8$$
$$-2x + 4 - 4 \leq 8 - 4$$
$$-2x \leq 4$$
$$-2x : (-2) \geq 4 : (-2)$$ ← Cambia sentido de la desigualdad.
$$x \geq -2$$

↓

Las soluciones son todos los números mayores o iguales que −2.

↓

Conjunto solución

$C_0 = \{-2; -1; 0; 1;...\}$

La solución de una inecuación puede representarse en la recta numérica.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué números enteros cumplen simultáneamente las condiciones $x > 3$ y $x < 8$? 4; 5; 6 y 7.
   b. ¿Es cierto que si $-5x > 0$ entonces $5x < 0$? Sí, al multiplicar por −1 cambia el sentido.
   c. ¿La expresión $2 < x < 5$ equivale a $x > 2$ y $x < 5$? Sí, es equivalente.
   d. ¿Por qué en las inecuaciones se habla de "conjunto solución"? A cargo del alumno.

ApAp

ACTIVIDADES

17. Inecuaciones

52. Resuelvan las siguientes inecuaciones y escriban el conjunto solución.

a. $5x - 6 < 2x + 3$

$5x - 2x < 3 + 6$

$3x < 9$

$x < 9 : 3 \rightarrow x < 3$

$C_0 =$ {...; 0; 1; 2}

b. $-2(x + 8) - 1 > 3$

$-2x - 16 > 3 + 1$

$-2x > 4 + 16$

$x < 20 : (-2) \rightarrow x < -10$

$C_0 =$ {...; −13; −12; −11}

c. $-136 \geq -28x + 172$

$-136 - 172 \geq -28x$

$-308 : (-28) \leq x$

$11 \leq x$

$C_0 =$ {11; 12; 13;...}

d. $16x - 28 \leq 6x + 72$

$16x - 6x \leq 72 + 28$

$10x \leq 100$

$x \leq 100 : 10 \rightarrow x \leq 10$

$C_0 =$ {...; 8; 9; 10}

e. $15(x + 7) \geq -12(x + 4) + 17 . 9$

$15x + 105 \geq -12x - 48 + 153$

$15x + 12x \geq -48 + 153 - 105$

$27x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$

$C_0 =$ {0; 1; 2; 3;...}

f. $18x - 24 - 7x - 31 > 0$

$11x > 0 + 24 + 31$

$x > 55 : 11$

$x > 5$

$C_0 =$ {6; 7; 8;...}

g. $(4 - 2x) : 2 \leq 10$

$2 - x \leq 10$

$-x \leq 10 - 2$

$x \geq 8 : (-1) \rightarrow x \geq -8$

$C_0 =$ {−8; −7; −6 ...}

h. $2(x - 1) - 2(1 - x) \leq 4$

$2x - 2 - 2 + 2x \leq 4$

$4x \leq 4 + 2 + 2$

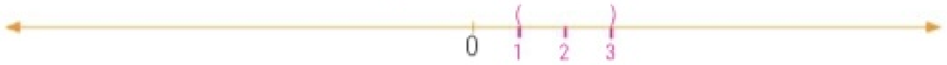
$x \leq 8 : 4 \rightarrow x \leq 2$

$C_0 =$ {...; 0; 1; 2}

53. Representen cada solución en la recta numérica.

a. $-4 < 2x \leq 2$

b. $1 < x < 3$



54. Traduzcan al lenguaje simbólico. Luego, resuelvan y escriban la solución.

a. El triple de la diferencia entre un número y 3 es menor o igual a 9. ¿Qué números son?

$3 . (x - 3) \leq 9 \rightarrow 3x - 9 \leq 9 \rightarrow 3x \leq 9 + 9 \rightarrow x \leq 18 : 3 \rightarrow x \leq 6$

Los números son {...; 4; 5; 6}.

b. La quinta parte de la suma entre el opuesto de un número y 7 es mayor que 1. ¿De qué números se trata?

$(-x + 7) : 5 > 1 \rightarrow -x + 7 > 1 . 5 \rightarrow -x > 5 - 7 \rightarrow x < -2 : (-1) \rightarrow x < 2$

Los números son {...; −1; 0; 1}.

Integración final

55. Escriban en lenguaje coloquial y resuelvan.
Lenguaje coloquial a cargo del alumno.

a. $x^2 + 2 = 3^2 \,.\, 2$ $x = \pm 4$

b. $\sqrt{x + 1} = 4$ $x = 15$

c. $(x - 1) : 6 = \sqrt{64}$ $x = 49$

d. $7x - 9 = \sqrt[3]{-8}$ $x = 1$

e. $(x + 2)^2 - 25 = 0$ $x = 3; x = -7$

56. Escriban las ecuaciones y resuelvan.

a. El doble de la suma de dos números consecutivos es igual a 10. ¿Qué números son?
$2 \,.\, (x + x + 1) = 10$ 2 y 3

b. La diferencia entre el cubo de un número y 3 es igual al opuesto del triple de 10. ¿De qué número se trata?
$x^3 - 3 = -3 \,.\, 10$ $x = -3$

c. La suma entre 120 y el cuadrado de un número es igual al cuádruple de 30. ¿Cuál es el número?
$120 + x^2 = 4 \,.\, 30$ $x = 0$

d. La raíz cúbica de la diferencia entre 10 y un número es igual a la mitad de 2. ¿Qué número es?
$\sqrt[3]{10 - x} = 2 : 2$ $x = 9$

e. El producto entre el cubo de un número y la raíz cuadrada de 36 es igual al opuesto de −6. ¿Cuál es el número? $x^3 \,.\, \sqrt{36} = -(-6)$ $x = 1$

57. Despejen "m" de cada expresión.

a. $zm + c = x$ $m = (x - c) : z$

b. $a(m + r) - x = 0$ $m = x : a - r$

c. $\sqrt{m + c} - a = y$ $m = (y + a)^2 - c$

d. $(x - a) : m = e$ $m = (x - a) : e$

e. $2m : (x + z) = a$ $m = [(x + z) \,.\, a] : 2$

f. $m(3 - x) + 1 = h$ $m = (h - 1) : (3 - x)$

g. $(2 + x) : m = z$ $m = (2 + x) : z$

h. $3 + (x + 4) \,.\, m = 0$ $m = -3 : (x + 4)$

i. $7(3 - m) = 14$ $m = 1$

j. $(2m + 6) : a = x$ $m = (x \,.\, a - 6) : 2$

58. Resuelvan las ecuaciones.

a. $x^2 + 5(x + 1) - 3(x - 2) = x^2 + 6$ $x = -2$

b. $3x + 1 = 3 - (2 - 2x)$ $x = 0$

c. $\sqrt[4]{2x - 1} + 6 = 7$ $x = 1$

d. $(x + 3)^2 - x^2 = -3$ $x = -2$

e. $-(x^2 - 5) = -20$ $x = \pm 5$

f. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4$ $x = 1$

g. $\sqrt{6 - 3x} + 9^0 = 1$ $x = 2$

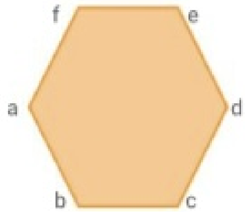
h. $2(x + 4) - 3(2x + 1) = 5(x + 2) + 4$ $x = -1$

Fe de erratas: en el ítem a, debe ir $6(x + 1)$ en lugar de $5(x + 1)$.

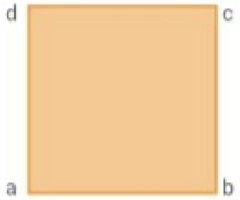
59. Calculen el perímetro de cada figura.

a. Rectángulo mnop. Perímetro = 10 cm
Área = $(x^2 + 2)$ cm²
H = x cm
B = (x + 1) cm

b. Hexágono regular abcdef. Perímetro = 54 cm
$\overline{ab} = x + 4$ cm
$\overline{cd} = 2x - 1$ cm



c. Cuadrado abcd Perímetro = 28 cm
$\overline{ab} = 5x - 3$ cm
$\overline{bc} = x + 5$ cm



60. **Resuelvan.**

a. La suma de las edades de Andrés y Camila es igual a 42 años. Si Camila tiene 4 años más que Andrés, ¿qué edad tiene cada uno?
Andrés tiene 19 años y Camila, 23 años.

b. En un negocio de pintura venden dos tamaños de latas: chica y grande. Si en total hay 2 200 latas y la cantidad de latas chicas triplica a las grandes, ¿cuántas latas hay de cada tamaño?
Hay 1 650 chicas y 550 grandes.

c. Luis y Pedro tienen en total ahorrados $1 150. Luis aportó el doble de Pedro más $100. ¿Cuánto dinero puso cada uno?
Luis aportó $800 y Pedro, $350.

61. **Escriban el conjunto solución y represéntenlo en una recta numérica.**

a. $4 \leq x \leq 9$ $C_0 = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

b. $0 < x < 3$ $C_0 = \{1; 2\}$

c. $x > -1$ y $x \leq 2$ $C_0 = \{0; 1; 2\}$

d. $x < -3$ o $x > 3$ $C_0 = \{...; -6; -5; -4\}$ y $\{4; 5; 6;...\}$

e. $-2 < x \leq 5$ $C_0 = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

f. $x \leq 5$ o $x \geq 7$ $C_0 = \{...; 3; 4; 5\}$ y $\{7; 8;...\}$

62. **Resuelvan las siguientes inecuaciones.**

a. $-5(x - 2) - 3x + 18 \leq 3x + 6$
$x \geq 2$

b. $6x - 30 > 2(3 - 3x)$
$x > 3$

c. $(-4x + 4) : 2 > \sqrt{16}$
$x < -1$

d. $2(2x + 1) - 2(2x - 1) \leq x$
$x \geq 4$

e. $(-4x + 9) \cdot 4 \leq -(10x - 30)$
$x \geq 1$

f. $2(-8 - 3x) \geq 9(x + 12) - 19$
$x \leq -7$

g. $7x - 7 + 3x \geq 9(x + 1) - 3$
$x \geq 13$

h. $-2(x + 8) + 5 < 3$
$x > -7$

i. $2(x + 1) + 3(x - 2) > x$
$x > 1$

j. $3x - (x + 4) < 0$
$x < 2$

63. **Escriban la inecuación y resuelvan.**

a. La suma entre el cuádruple de un número y 12 es mayor que 48.
$4x + 12 > 48$ $x > 9$

b. El cociente entre un número y 5 es menor o igual que la raíz cuadrada de 169.
$x : 5 \leq \sqrt{169}$ $x \leq 65$

c. El producto entre el triple de un número y 6 es menor que la raíz cuadrada de 324.
$3x \cdot 6 < \sqrt{324}$ $x < 1$

d. La diferencia entre el cuádruple de un número y el doble de 6 es menor que la raíz cuadrada de 16.
$4x - 2 \cdot 6 < \sqrt{16}$ $x < 4$

e. El cociente entre el consecutivo de un número y 3 es mayor o igual que la raíz cúbica de 64.
$(x + 1) : 3 \geq \sqrt[3]{64}$ $x \geq 11$

64. **Inventen un enunciado que tenga por solución lo pedido en cada caso.** A cargo del alumno.

a. $x \geq 3$

b. $x < 8$

c. $x > 4$

d. $x \leq 1$

65. **Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.**

a. No hay ningún número entero que cumpla que $x < -2$ y $x > 3$. V

b. La expresión $x < 0$ indica que "x" es un número positivo. Indica que es negativo. F

c. La expresión $4 < x < 6$ tiene por conjunto solución $C_0 = \{4; 5; 6\}$. Solo 5. F

d. La expresión $x < 0$ indica que "x" es un número negativo. V

e. La inecuación $3 < x < 4$ no tiene solución en el conjunto de los números naturales. V

f. La solución de la inecuación $2x - 3x > 4$ es $x > 4$. Es $x < -4$. F

3 Números racionales

18. Los números racionales

TIP

$\mathbb{Q}_0^+$ Indica que se incluyen los números racionales positivos y el cero.

$\mathbb{Q}$ Indica que se incluyen los números racionales negativos, positivos y el cero.

▶ SABERES DINÁMICOS

Los números racionales en $\mathbb{Q}_0^+$

Un **número racional** es aquel que se puede expresar de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y b ≠ 0.

Dos **fracciones** son **equivalentes** cuando representan el mismo número racional.

Para obtener **fracciones equivalentes** se pueden usar los siguientes procedimientos.

Amplificación	Simplificación
Se **multiplican** el numerador y el denominador por un mismo número natural distinto de cero. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$ $\quad \frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{6}{48}$	Se **dividen** el numerador y el denominador por un mismo número natural distinto de cero. $\frac{4}{20} = \frac{4 : 4}{20 : 4} = \frac{1}{5}$ $\quad \frac{25}{15} = \frac{25 : 5}{15 : 5} = \frac{5}{3}$

Una **fracción** es **irreducible** cuando no se puede simplificar. En este caso, el numerador y el denominador son coprimos. Una **fracción** es **decimal** cuando el denominador es una potencia de 10: 10, 100, 1 000, etc. Todo número racional se puede **escribir como una expresión decimal**. Para encontrar la expresión decimal se puede dividir el numerador por el denominador.

$\frac{2}{25} = 2 : 25 = 0{,}08$ *Expresión decimal finita: tiene un número finito de cifras decimales.*

$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8333... = 0{,}8\widehat{3}$ *Expresión decimal periódica: tiene cifras decimales que se repiten infinitamente.*

Toda expresión decimal se puede **escribir como fracción** siguiendo estos procedimientos.

• Si la expresión decimal es finita: se escribe en el numerador el número (sin la coma) y en el denominador, el uno seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal.	$1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$
• Si la expresión decimal es periódica: se escribe en el numerador el número (sin la coma) restándole la parte no periódica y en el denominador, tantos nueves como cifras tenga el período y tantos ceros como cifras tenga la parte decimal no periódica.	$1{,}2\widehat{3} = \frac{123 - 12}{90} = \frac{111}{90}$

Orden en $\mathbb{Q}_0^+$

Para **comparar fracciones** se puede aplicar alguno de los siguientes métodos: *Para comparar $\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{5}$.*

• Método A: se buscan fracciones equivalentes con el mismo denominador y se comparan los nuevos numeradores. Será menor la fracción cuyo numerador sea menor.

$\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$ *y* $\frac{6}{5} = \frac{12}{10}$*; como* $\frac{15}{10} > \frac{12}{10}$*, entonces* $\frac{3}{2} > \frac{6}{5}$.

• Método B: se multiplica cruzado el numerador de una fracción por el denominador de la otra y se asocia cada resultado obtenido con la fracción del numerador utilizado. Luego, se comparan los resultados.

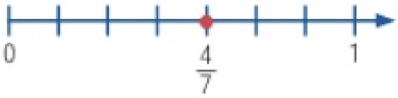
$\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{5}$ $\quad 3 \cdot 5 = 15$ y $2 \cdot 6 = 12$ $\quad$ *Como 15 > 12, entonces* $\frac{3}{2} > \frac{6}{5}$.

18. Los números racionales

Representación en la recta numérica en $\mathbb{Q}_0^+$

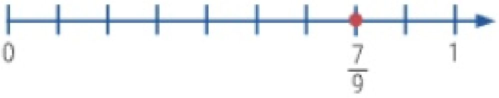
Para **representar un número racional en la recta numérica** se escribe como fracción y luego se divide la unidad (el entero) en tantas partes iguales como indica el denominador y se toman tantas partes como indica el numerador.

Para representar $\frac{4}{7}$ se divide la unidad en 7 partes iguales y se ubica en la cuarta marca.



En el caso que las fracciones tengan distinto denominador, se buscan primero las fracciones equivalentes con el mismo denominador y luego se representan en la recta numérica.

Para representar $0,\overset{\frown}{7}$, se transforma el número decimal en fracción y luego se la representa.



Densidad de los números racionales en $\mathbb{Q}_0^+$

Entre dos números racionales diferentes siempre es posible encontrar otro número racional.

Por ejemplo: entre el 0 y el 1 se encuentra el $\frac{1}{2}$, entre el $\frac{1}{2}$ y el 1 se encuentra el $\frac{3}{4}$, entre $\frac{3}{4}$ y 1 se encuentra el $\frac{7}{8}$, y así sucesivamente.

Como entre dos números racionales hay infinitos números racionales, se dice que es un conjunto **denso**.

Orden y representación en $\mathbb{Q}$

Si **se comparan una fracción positiva y una negativa**, siempre será mayor la fracción positiva.
Para **comparar dos fracciones negativas** se pueden seguir los métodos anteriores.

Para comparar $-\frac{4}{5}$ y $-\frac{5}{8}$.

• Método A: $-\frac{4}{5} = -\frac{32}{40}$ y $-\frac{5}{8} = -\frac{25}{40}$; *como* $-\frac{32}{40} < -\frac{25}{40}$, *entonces* $-\frac{4}{5} < -\frac{5}{8}$.

• Método B [el signo menos (−) se asigna al numerador].

$-\frac{4}{5}$ y $-\frac{5}{8}$ $\quad -4 \,.\, 8 = -32$ y $5 \,.\, -5 = -25$ $\qquad$ *Como* $-32 < -25$, *entonces* $-\frac{4}{5} < -\frac{5}{8}$.

Para representar $-\frac{5}{2}$ se divide del lado negativo la unidad en 2 partes iguales y se ubica en la quinta marca.

a. Sí.
b. No, el menor es aquel que está a la izquierda en la recta numérica.
c. En 6 partes iguales.
d. No, ya que es un conjunto denso.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Cuando se comparan dos números racionales positivos, ¿es menor el número que está más cerca del cero?
   b. Cuando se comparan dos números racionales negativos, ¿es menor el número que está más cerca del cero?
   c. Para representar en la recta numérica los números 0,5 y $\frac{1}{3}$, ¿en cuántas partes conviene dividir la unidad?
   d. ¿Se puede decir cuál es el número racional que le sigue a $\frac{1}{5}$?

ApAp

ACTIVIDADES

18. Los números racionales

$\mathbb{Q}_0^+$ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

1. Encierren en un círculo los números que no pertenecen al conjunto Q.

2 $\sqrt{7}$ (encerrado) $1{,}2$ $\frac{4}{11}$ $\frac{9}{4}$ 0 $1{,}\widehat{3}$ $\sqrt{19}$ (encerrado)

2. Completen con un número para que las fracciones sean equivalentes.

a. $\frac{6}{5} = \frac{18}{\boxed{15}}$

b. $\frac{1}{4} = \frac{\boxed{4}}{16}$

c. $\frac{24}{9} = \frac{\boxed{8}}{3}$

d. $\frac{2}{5} = \frac{40}{\boxed{100}}$

e. $\frac{3}{7} = \frac{21}{\boxed{49}}$

f. $\frac{8}{10} = \frac{\boxed{80}}{100}$

g. $2 = \frac{48}{\boxed{24}}$

h. $\frac{28}{42} = \frac{\boxed{4}}{6}$

3. Completen la tabla. Pueden usar la calculadora para encontrar las expresiones decimales.

Fracción irreducible	Fracción equivalente	Expresión decimal
2/5	$\frac{8}{20}$	0,4
1/3	$\frac{6}{18}$	$0,\widehat{3}$
7/2	$\frac{21}{6}$	3,5
3/8	$\frac{15}{40}$	0,375
3/11	$\frac{6}{22}$	$0,\widehat{27}$

4. Completen con >, < o = según corresponda.

a. $\frac{6}{7} \boxed{<} \frac{8}{3}$

b. $\frac{1}{2} \boxed{<} 1$

c. $\frac{7}{2} \boxed{>} \frac{8}{5}$

d. $\frac{10}{2} \boxed{=} \frac{30}{6}$

e. $\frac{4}{5} \boxed{<} \frac{5}{6}$

f. $\frac{9}{8} \boxed{>} \frac{1}{3}$

g. $2 \boxed{<} \frac{18}{3}$

h. $\frac{6}{7} \boxed{<} \frac{8}{3}$

5. Resuelvan.

a. Ordenen de mayor a menor las siguientes fracciones.

$\frac{4}{3}; \frac{7}{9}; \frac{11}{8}; \frac{5}{6}; \frac{13}{13}$

$11/8 > 4/3 > 13/13 > 5/6 > 7/9$

b. Ordenen de menor a mayor las siguientes fracciones.

$\frac{5}{8}; \frac{7}{5}; \frac{3}{4}; \frac{6}{5}; \frac{13}{10}$

$5/8 < 3/4 < 6/5 < 13/10 < 7/5$

ACTIVIDADES

18. Los números racionales

$\mathbb{Q}_0^+$ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

6. **Escriban dos fracciones que estén comprendidas entre los números racionales dados.**
Las soluciones no son únicas.

a. $\frac{3}{7}$ y $\frac{6}{7}$ 4/7 y 5/7.

b. $\frac{1}{5}$ y $\frac{4}{5}$ 2/5 y 3/5.

c. $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{8}$ 5/8 y 6/8.

d. $\frac{2}{9}$ y $\frac{2}{3}$ 4/9 y 5/9.

e. $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ 3/8 y 7/16.

f. 0 y $\frac{1}{2}$ 1/8 y 1/4.

PenCrit **7.** **Escriban V (verdadero) o F (falso).**

a. El número $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pertenece al conjunto Q. F

b. Entre dos fracciones de igual denominador será mayor la de mayor numerador. V

c. Todos los números decimales se pueden escribir como una fracción. F

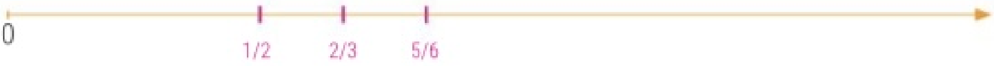
d. Todas las fracciones se pueden escribir como número decimal. V

e. El número $1,5\overset{\frown}{7}$ pertenece a Q. V

8. **Representen los siguientes números racionales en cada recta numérica.**

a. $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{9}{4}$

b. $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$



c. $0,\overset{\frown}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{4}$

9. **Completen con la fracción irreducible que corresponde a cada letra ubicada en la recta numérica.**

a.

b.

A = $\frac{1}{4}$ B = $\frac{1}{4}$

10. **Completen con la fracción que representa el punto y luego escriban tres fracciones equivalentes.**

a.

P = $\frac{1}{6}$ Fracciones equivalentes = $\frac{2}{12}$ = $\frac{3}{18}$ = $\frac{4}{24}$

b.

Q = $\frac{5}{2}$ Fracciones equivalentes = $\frac{10}{4}$ = $\frac{15}{6}$ = $\frac{20}{8}$

18. Los números racionales

Q Actividades para trabajar con los números racionales

11. Escriban tres ejemplos de fracciones que cumplan lo pedido en cada caso. Las soluciones no son únicas.

a. Pertenecen a Q^+ y son menores que 1. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$

b. Pertenecen a Q^- y son mayores que −1. $\frac{-1}{3}$ $\frac{-3}{4}$ $\frac{-4}{5}$

c. Pertenecen a Q y están comprendidos entre −1 y 1. $\frac{-2}{3}$ $\frac{-2}{5}$ $\frac{1}{4}$

12. Completen con $>$, $<$ o $=$ según corresponda.

a. $-\frac{1}{2} < \frac{2}{4}$

b. $\frac{1}{4} > -1$

c. $-\frac{2}{5} > -\frac{3}{5}$

d. $-\frac{1}{11} > -\frac{7}{10}$

e. $\frac{3}{7} > -\frac{6}{7}$

f. $-\frac{3}{4} < \frac{6}{8}$

g. $-2 > -\frac{13}{6}$

h. $-\frac{8}{9} < -\frac{5}{6}$

13. Resuelvan.

a. Ordenen de mayor a menor los siguientes números racionales.

$\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}; \frac{13}{10}; -\frac{4}{3}; -1,\widehat{3}$

7/5, 13/10, −6/5, $-1,\widehat{3}$ = −4/3

b. Ordenen de menor a mayor los siguientes números racionales.

$-\frac{10}{3}; 1,25; \frac{1}{6}; -1; \frac{3}{4}$

−10/3, −1, 1/6, 3/4; 1,25

14. Escriban dos fracciones que estén comprendidas entre los números racionales dados.

a. −1 y 0 $\frac{-2}{3}$ $\frac{-1}{3}$

b. $-\frac{1}{2}$ y 1 $\frac{-1}{3}$ $\frac{1}{2}$

c. -2 y $-\frac{3}{4}$ $\frac{-5}{3}$ $\frac{-7}{5}$

d. $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ $\frac{-1}{4}$ $\frac{1}{8}$

e. $-\frac{1}{2}$ y 0 $\frac{-1}{4}$ $\frac{-1}{8}$

f. $-\frac{3}{5}$ y $-\frac{2}{5}$ $\frac{-1}{2}$ $\frac{-7}{15}$

15. Escriban una fracción que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

a. Negativa mayor que $-\frac{1}{3}$. Por ejemplo: $\frac{-2}{3}$

b. Positiva menor que $\frac{2}{7}$ y de igual denominador. $\frac{1}{7}$

c. Mayor que $0,\widehat{5}$. Por ejemplo: $\frac{7}{9}$

d. Negativa menor que $-1,\widehat{2}$. Por ejemplo: $\frac{-13}{9}$

e. Irreducible igual a 1,2. $\frac{6}{5}$

f. Decimal menor que $\frac{3}{5}$. Por ejemplo: $\frac{3}{10}$

18. Los números racionales

Actividades para trabajar con los números racionales

16. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Toda fracción negativa ¿es siempre menor que una fracción positiva?

Sí, siempre.

b. ¿Siempre se puede encontrar una fracción entre otras dos fracciones?

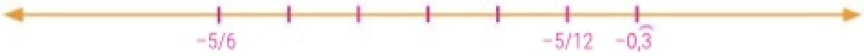
Sí, siempre es posible.

17. Representen los siguientes números racionales en cada recta numérica.

a. $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$; 0,75

b. −0,5; $-\frac{7}{6}$; $\frac{1}{3}$

c. $-0,\widehat{3}$; $-\frac{5}{12}$; $-\frac{5}{6}$



d. −0,9; $-\frac{3}{10}$; $-\frac{3}{5}$

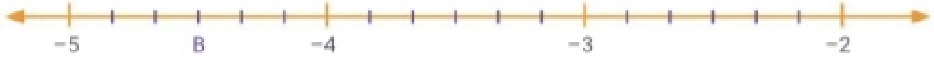
e. −0,25; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{7}{6}$

18. Completen con el número decimal que corresponde a cada letra ubicada en la recta numérica.

a.

A = −1,25

b.



B = −4,5

c.

C = −5,2

19. Aproximación. Notación científica

▶ SABERES DINÁMICOS

Aproximación en $\mathbb{Q}_0^+$

Cuando se trabaja con números muy grandes o pequeños es útil considerar una expresión decimal aproximada. Se puede aproximar **por redondeo o por truncamiento**.

• Para **aproximar por redondeo** una cifra decimal determinada hay que indicar a qué unidad se aproximará y observar la cifra decimal siguiente.

Si la cifra siguiente **es mayor o igual a 5**, se le suma uno a la cifra considerada y se elimina el resto de las cifras.	Si la cifra siguiente **es menor a 5**, se deja igual a la cifra considerada y se elimina el resto de las cifras.
0,59 aproximado a los décimos es 0,6 *2,365 aproximado a los centésimos es 2,37*	*0,23 aproximado a los décimos es 0,2* *5,261 aproximado a los centésimos es 5,26*

• Para **aproximar por truncamiento** se eliminan las cifras que están a la derecha de la cifra considerada.

14,961 aproximado a los décimos por truncamiento es 14,9.

14,961 aproximado a los centésimos por truncamiento es 14,96.

Notación científica en $\mathbb{Q}_0^+$

La **notación científica** es una forma abreviada de expresar números muy grandes o muy pequeños.
Un número está expresado en notación científica cuando está escrito como producto entre un número cuyo módulo está entre 1 y 10, y una potencia de base 10.

Potencias de base 10	
Exponente positivo	**Exponente negativo**
$10^1 = 10$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$
$10^3 = 1\,000$	$10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$
$10^4 = 10\,000$	$10^{-4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

Número entre 1 y 10

$7\,500 = 7{,}5 \,.\, 1\,000 = 7{,}5 \,.\, 10^3 \longrightarrow 7\,500 = 7{,}5 \,.\, 10^3$

Potencia de base 10 — Notación científica

Número entre 1 y 10

$0{,}000138 = 1{,}38 \,.\, \frac{1}{10\,000} = 1{,}38 \,.\, 10^{-4} \longrightarrow 0{,}000138 = 1{,}38 \,.\, 10^{-4}$

Potencia de base 10 — Notación científica

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que al redondear 5,98 a los décimos se obtiene un número entero? Sí, es cierto.
   b. ¿Cómo se expresa en notación científica 2 000? ¿Y 0,03? $2\,000 = 2 \,.\, 10^3$; $0{,}03 = 3 \,.\, 10^{-2}$.
   ApAp c. ¿Bajo qué condiciones se obtiene el mismo número al redondearlo que al truncarlo?
   Cuando la cifra decimal siguiente es 0, 1, 2, 3 o 4.

ACTIVIDADES

19. Aproximación. Notación científica

$\mathbb{Q}_0^+$ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

19. Completen la tabla.

Expresión decimal	Aproximación por truncamiento a los décimos	Aproximación por redondeo a los centésimos
12,569	12,5	12,57
436,771	436,7	436,77
1,409	1,4	1,41
589,113	589,1	589,11
0,278	0,2	0,28
26,908	26,9	26,91

20. Escriban un ejemplo que cumpla lo pedido en cada caso.

a. 7,48 es la aproximación por redondeo de 7,481 .

b. 0,91 es la aproximación por truncamiento de 0,912 .

c. 32,78 es la aproximación por redondeo de 32,783 .

d. 6,43 es la aproximación por truncamiento de 6,4356 .

21. Completen la tabla.

Números	Notación científica
27 000 000 000	$2{,}7 \,.\, 10^{10}$
13 500	$1{,}35 \,.\, 10^{4}$
89 000 000	$8{,}9 \,.\, 10^{7}$
0,026	$2{,}6 \,.\, 10^{-2}$
0,0006	$6 \,.\, 10^{-4}$
0,00000045	$4{,}5 \,.\, 10^{-7}$

22. Escriban en notación científica y resuelvan aplicando propiedades. Verifiquen con la calculadora.

a. 0,0000076 . 120 000 000 =

$7{,}6 \,.\, 10^{-6} \,.\, 1{,}2 \,.\, 10^{8} = 9{,}12 \,.\, 10^{2}$

b. 550 000 . 0,001 . 0,04 =

$5{,}5 \,.\, 10^{5} \,.\, 1 \,.\, 10^{-3} \,.\, 4 \,.\, 10^{-2} = 2{,}2 \,.\, 10$

c. 63 000 000 000 : 1 400 000 =

$6{,}3 \,.\, 10^{10} : 1{,}4 \,.\, 10^{6} = 4{,}5 \,.\, 10^{4}$

d. 0,0000015 : 0,005 =

$1{,}5 \,.\, 10^{-6} : 5 \,.\, 10^{-3} = 3 \,.\, 10^{-4}$

$\mathbb{Q}_0^+$ Números racionales positivos y el cero

23. Completen con >, < o =.

a. $\frac{1}{7}$ [>] $\frac{2}{15}$

b. $\frac{17}{6}$ [>] $\frac{8}{7}$

c. $\frac{14}{4}$ [=] $\frac{28}{8}$

d. $\frac{3}{13}$ [<] $\frac{4}{11}$

e. $\frac{3}{16}$ [=] $\frac{9}{48}$

f. $\frac{6}{14}$ [>] $\frac{5}{12}$

24. Ordenen de mayor a menor los siguientes números.

a. 1,3; $\frac{7}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{5}$ 7/3 > 1,3 > 4/5 > 1/6

b. $2,\widehat{1}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{1}{3}$ 10/3 > $2,\widehat{1}$ > 1/3 > 2/9

25. Escriban dos fracciones comprendidas entre los números dados. Las soluciones no son únicas
*Fe de erratas: en el ítem d las fracciones que corresponden son: 1/5 y 2/5.

a. $\frac{3}{8}$ y $\frac{14}{16}$ 7/16 y 1/2.

b. $0,\widehat{3}$ y $\frac{5}{3}$ 2/3 y 4/3.

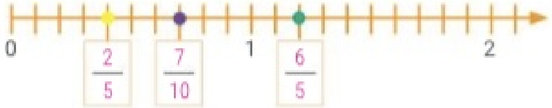
c. $\frac{4}{7}$ y $\frac{13}{21}$ 25/42 y 51/84.

d. $\frac{3}{8}$ y $\frac{14}{16}$ 1/4 y 7/20.*

e. $\frac{3}{2}$ y $2,\widehat{3}$ 11/6 y 13/7

26. Ubiquen en una recta numérica dos fracciones con denominador 5 que estén comprendidas entre el 3 y el 4. Puede ser 16/5, 17/5, 18/5 o 19/5

27. Escriban la fracción irreducible que representa cada punto de la recta.



$\mathbb{Q}$ Números racionales

28. Escriban lo pedido en cada caso.
Las soluciones no son únicas.

a. Dos fracciones positivas con denominador 6 menores que 1. 1/6 y 5/6.

b. Dos expresiones decimales equivalentes a $0,\widehat{8}$.
0,8888... y $0,\widehat{88}$.

c. Dos fracciones negativas mayores que −1.
−1/3 y −1/2.

d. Dos fracciones negativas comprendidas entre −5 y −4.
−9/2, −19/4.

29. Completen con >, < o =.

a. $-\frac{15}{11}$ [<] $-\frac{12}{11}$ b. $\frac{4}{5}$ [>] $-\frac{2}{3}$

30. Ordenen de menor a mayor los siguientes números.

a. −2,2; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{9}{4}$ b. $-0,\widehat{3}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{10}$; $\frac{2}{9}$

−9/4 < −2,2 < 1/3 < 3/8 −1/3 < −3/10 < 2/9 < 1/4

31. Escriban dos fracciones comprendidas entre los números dados. Las soluciones no son únicas.

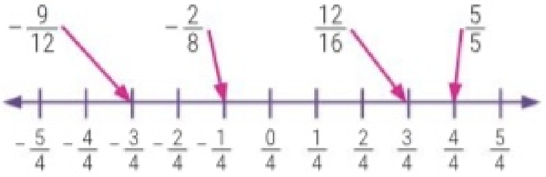
a. $-\frac{3}{10}$ y $-\frac{1}{10}$ b. $-\frac{9}{12}$ y $-\frac{8}{12}$

−29/100 y −11/100. −17/24 y −81/120.

32. Representen en una recta numérica los siguientes números fraccionarios.

$\frac{3}{4}$; $\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{8}$ A cargo del alumno.

33. Unan cada fracción con el punto que le corresponde en la recta.



34. Escriban V (verdadero) o F (falso). PenCrit

a. El número $\frac{\sqrt{3}}{5}$ pertenece al conjunto Q. [F]

b. Todo número negativo es siempre menor que una fracción positiva. [V]

c. Entre dos fracciones diferentes hay un único número racional. [F]

$\mathbb{Q}_0^+$ Números racionales positivos y el cero

35. Completen la tabla.

Número	Truncamiento a los décimos	Redondeo a los décimos
12,75	12,7	12,8
2,36	2,3	2,4
5,81	5,8	5,8
0,125	0,1	0,1
42,973	42,9	43
6,271	6,2	6,3

36. Transformen en número decimal y redondeen a décimos.

a. $\frac{3}{4} =$ 0,75 → 0,8

b. $\frac{1}{3} =$ $0,\overset{\frown}{3}$ → 0,3

c. $\frac{7}{9} =$ $0,\overset{\frown}{7}$ → 0,8

d. $\frac{123}{100} =$ 1,23 → 1,2

e. $\frac{8}{90} =$ $0,0\overset{\frown}{8}$ → 0,1

37. Escriban un ejemplo de un número con tres decimales que redondeado a centésimos dé por resultado el número dado. Las soluciones no son únicas.

a. 12,11 12,114

b. 8,06 8,0611

c. 45,25 49,2501

d. 99,80 99,803

38. Expresen los siguientes datos en notación científica.

a. La población de China en 2018 era de 1 390 000 000 habitantes.
$1,39 \, . \, 10^9$

b. El valor aproximado de la velocidad de la luz es 300 000 000 metros por segundo.
$3 \, . \, 10^8$

c. El diámetro de un átomo de hidrógeno es 0,0000000001 m.
$1 \, . \, 10^{-10}$

d. La distancia de la Tierra al Sol en metros es de 149 600 000 000 m.
$1,496 \, . \, 10^{11}$

$\mathbb{Q}$ Números racionales

39. Escriban los números expresados en notación científica.

a. $2,3 \, . \, 10^6$ 2 300 000

b. $4 \, . \, 10^{-3}$ 0,004

c. $1,23 \, . \, 10^4$ 12 300

d. $7,1 \, . \, 10^{-9}$ 0,0000000071

e. $5 \, . \, 10^{11}$ 500 000 000 000

f. $8,6 \, . \, 10^{-7}$ 0,00000086

g. $9 \, . \, 10^5$ 900 000

h. $3,15 \, . \, 10^{-5}$ 0,0000315

40. Escriban V (verdadero) o F (falso).

a. $12\,000\,000 = 1,2 \, . \, 10^6$ F

b. $560\,000 = 5,6 \, . \, 10^5$ V

c. $0,0000006 = 6 \, . \, 10^{-7}$ V

d. $0,000345 = 3,45 \, . \, 10^3$ F

e. $800\,000\,000\,000 = 8 \, . \, 10^{11}$ V

f. $0,2 = 2 \, . \, 10^{-2}$ F

41. Resuelvan los siguientes cálculos.

a. $2,3 \, . \, 10^8 \, . \, 4 \, . \, 10^6 =$ $9,2 \, . \, 10^{14}$

b. $\frac{9,3 \, . \, 10^2}{3 \, . \, 10^{-2}} =$ $3,1 \, . \, 10^4$

c. $\frac{6 \, . \, 10^8}{2 \, . \, 10^2} =$ $3 \, . \, 10^6$

d. $\frac{3,12 \, . \, 10^5 \, . \, 4 \, . \, 10^3}{2 \, . \, 10^{-3}} =$ $6,24 \, . \, 10^{11}$

e. $2,5 \, . \, 10^6 \, . \, 1,2 \, . \, 10^{-5} \, . \, 2 \, . \, 10^{-1} =$ 6

f. $\frac{6,4 \, . \, 10^3 \, . \, 2 \, . \, 10^{-1}}{4 \, . \, 10^3} =$ $3,2 \, . \, 10^{-1}$

42. Escriban los números en notación científica y luego resuelvan.

a. $120\,000 \, . \, 0,0000008 =$
$1,2 \, . \, 10^5 \, . \, 8 \, . \, 10^{-7} = 9,6 \, . \, 10^{-2}$

b. $145\,000\,000 : 50\,000 =$
$1,45 \, . \, 10^8 : 5 \, . \, 10^4 = 2,9 \, . \, 10^3$

c. $24\,500\,000 : 0,0000005 =$
$2,45 \, . \, 10^7 : 5 \, . \, 10^{-7} = 4,9 \, . \, 10^{13}$

d. $0,000003 \, . \, 0,00012 =$
$3 \, . \, 10^{-6} \, . \, 1,2 \, . \, 10^{-4} = 3,6 \, . \, 10^{-10}$

e. $0,0003 : 200 =$
$3 \, . \, 10^{-4} : 2 \, . \, 10^2 : = 1,5 \, . \, 10^{-6}$

f. $0,004 \, . \, 3\,000\,000 : 1\,200 =$
$4 \, . \, 10^{-3} \, . \, 3 \, . \, 10^6 : 1,2 \, . \, 10^3 = 1 \, . \, 10^1$

20. Adición y sustracción

▶ SABERES DINÁMICOS

Adición y sustracción en $\mathbb{Q}_0^+$

Para **sumar** (**o restar**) fracciones del **mismo denominador** se suman (o restan) los numeradores y se coloca el mismo denominador.

Adición	$\frac{7}{8}+\frac{2}{8}=\frac{7+2}{8}=\frac{9}{8}$	$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}$
Sustracción	$\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}$	$\frac{6}{7}-\frac{3}{7}=\frac{6-3}{7}=\frac{3}{7}$

Para **sumar** (**o restar**) fracciones de **distinto denominador** se buscan fracciones equivalentes a las dadas y luego se resuelve.

Adición	$\frac{5}{2}+\frac{2}{3}=\frac{15}{6}+\frac{4}{6}=\frac{19}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{13}{12}$
Sustracción	$\frac{13}{5}-\frac{9}{10}=\frac{26}{10}-\frac{9}{10}=\frac{17}{10}$	$\frac{7}{14}-\frac{1}{7}=\frac{7}{14}-\frac{2}{14}=\frac{5}{14}$

Adición y sustracción en $\mathbb{Q}$

Cuando en la **adición** o **sustracción se incluyen fracciones negativas** (Q^-) se resuelve de la misma manera que en Q_0^+ teniendo en cuenta que las fracciones negativas se escriben entre paréntesis y que al resolver la operación estos se deben eliminar siguiendo la siguiente regla:

- Si delante de un paréntesis hay un signo **+** (más), se eliminan los paréntesis sin hacer ningún cambio de signo.
- Si delante de un paréntesis hay un signo **−** (menos), se eliminan los paréntesis y se cambian todos los signos de los términos que están en su interior.

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b}-\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Adición	$\frac{5}{7}+\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{3}{6}-\frac{10}{6}=-\frac{13}{6}$
Sustracción	$-\frac{1}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}-\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{10}{24}+\frac{3}{24}=\frac{13}{24}$

Siempre que sea posible es conveniente simplificar el resultado.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que la suma $\frac{4}{5}+\frac{11}{5}$ da por resultado un número entero? Sí. El resultado es 3.

b. ¿Es cierto que resolver $\frac{1}{8}+\left(-\frac{3}{4}\right)$ es lo mismo que resolver $\frac{1}{8}-\frac{3}{4}$? Sí.

ApAp c. Propongan tres ejemplos en que la suma de dos fracciones dé por resultado cero. ¿Cómo resultan esos números?
Por ejemplo: 3/4 + (−3/4); 4/7 + (−4/7); 1/3 + (−1/3). Deben ser fracciones opuestas.

20. Adición y sustracción

Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

43. Resuelvan las siguientes sumas y restas con fracciones de igual denominador y luego simplifiquen el resultado cuando sea posible.

a. $\frac{7}{11} + \frac{3}{11} =$ 10/11

b. $\frac{1}{2} + \frac{9}{2} =$ 10/2 = 5

c. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$ 2/4 = 1/2

d. $\frac{7}{9} - \frac{1}{9} =$ 6/9 = 2/3

e. $\frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{11}{36} =$ 20/36 = 5/9

f. $\frac{11}{10} + \frac{11}{10} - \frac{4}{10} =$ 18/10 = 9/5

44. Elijan una de las fracciones y completen para que se cumpla la igualdad.

a. $\boxed{\frac{1}{5}} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ • $\frac{1}{5}$ • $\frac{4}{5}$ • $\frac{7}{5}$

b. $\frac{8}{3} - \boxed{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3}$ • $\frac{15}{3}$ • $\frac{1}{3}$ • $\frac{1}{6}$

c. $\boxed{\frac{2}{7}} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$ • $\frac{8}{7}$ • $\frac{2}{8}$ • $\frac{2}{7}$

d. $\frac{11}{2} - \boxed{\frac{10}{2}} = \frac{1}{2}$ • $\frac{10}{2}$ • $\frac{1}{2}$ • $\frac{12}{2}$

45. Unan con flechas cada operación con el resultado correspondiente.

a. $\frac{1}{5} + \frac{4}{10} =$	• $\frac{13}{24}$
b. $\frac{2}{3} - \frac{1}{8} =$	• $\frac{1}{6}$
c. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$	• $\frac{3}{5}$
d. $\frac{7}{4} + 2 =$	• $\frac{1}{4}$
e. $2 - \frac{7}{4} =$	• $\frac{21}{8}$
f. $\frac{8}{4} + \frac{5}{8} =$	• $3\frac{3}{4}$

46. Resuelvan las siguientes sumas y restas con fracciones de distinto denominador y luego simplifiquen el resultado cuando sea posible.

a. $\frac{7}{12} + \frac{3}{4} =$ 7/12 + 9/12 = 16/12 = 4/3

b. $\frac{1}{4} + \frac{7}{2} =$ 1/4 + 14/4 = 15/4

c. $\frac{5}{12} - \frac{5}{24} =$ 10/24 – 5/24 = 5/24

d. $\frac{5}{6} + \frac{1}{12} + \frac{5}{24} =$ 20/24 + 2/24 + 5/24 = 27/24 = 9/8

e. $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} + \frac{7}{16} =$ 12/16 – 10/16 + 7/16 = 9/16

f. $\frac{3}{4} - \frac{1}{10} - \frac{3}{5} =$ 15/20 – 2/20 – 12/20 = 1/20

Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

47. Completen la tabla resolviendo las operaciones en fracciones.

a	b	c	a + b	b − c	c + a
1,2	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	9/5	1/2	11/10
$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{6}$	$0,\widehat{3}$	17/18	1/2	4/9
$\frac{3}{5}$	1,2	$\frac{1}{25}$	9/5	29/25	16/25
$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$	13/4	9/8	17/8
$\frac{12}{15}$	$\frac{4}{5}$	0,8	8/5	0	8/5

48. Escriban todos los números como fracciones y resuelvan. Simplifiquen los resultados cuando sea posible.

a. $0,8 - \frac{1}{2} + 0,\widehat{3} =$ 8/10 − 1/2 + 1/3 =
24/30 − 15/30 + 10/30 = 19/30

b. $\frac{3}{10} - 0,2 + \frac{1}{2} =$ 3/10 − 2/10 + 1/2 =
3/10 − 2/10 + 5/10 = 6/10 = 3/5

c. $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} - 0,\widehat{5} =$ 1/6 + 2/3 − 5/9 =
3/18 + 12/18 − 10/18 = 5/18

d. $\frac{9}{7} + 1 - \frac{1}{14} =$ 9/7 + 1/1 − 1/14 =
18/14 + 14/14 − 1/14 = 31/14

e. $1,5 - 0,4 + \frac{7}{3} =$ 15/10 − 4/10 + 7/3 =
45/30 − 12/30 + 70/30 = 103/30

f. $\frac{5}{6} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} =$ 25/30 − 6/30 − 10/30 = 9/30 = 3/10

g. $1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} - 1 =$ 5/4 + 5/2 − 1/1 =
5/4 + 10/4 − 4/4 = 11/4

h. $\frac{1}{12} + 0,\widehat{6} - \frac{1}{3} =$ 1/12 + 2/3 − 1/3 =
1/12 + 8/12 − 4/12 = 5/12

20. Adición y sustracción

Actividades para trabajar con los números racionales

49. Resuelvan las siguientes sumas y restas con fracciones de igual denominador. Simplifiquen los resultados cuando sea posible.

a. $\frac{10}{7} - \frac{11}{7} =$ −1/7

b. $\frac{5}{8} + \left(-\frac{2}{8}\right) =$ 5/8 − 2/8 = 3/8

c. $-\frac{3}{5} - \frac{8}{5} =$ −11/5

d. $\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) =$ 3/4 + 3/4 = 6/4 = 3/2

e. $\frac{5}{16} - \left(-\frac{8}{16}\right) + \left(-\frac{13}{16}\right) =$ 5/16 + 8/16 − 13/16 = 0

f. $-\frac{25}{6} - \frac{1}{6} + \frac{13}{6} =$ −13/6

50. Unan con flechas cada operación con el resultado correspondiente.

a. $-1 - \left(-\frac{1}{2}\right) =$

b. $3 + \left(-\frac{14}{3}\right) =$

c. $-\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{3}\right) =$

d. $\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{15}\right) =$

e. $-\frac{1}{7} + \frac{9}{14} =$

- $-\frac{1}{15}$
- $\frac{1}{2}$
- $-\frac{5}{3}$
- $\frac{1}{15}$
- $-\frac{1}{2}$

51. Resuelvan las siguientes sumas y restas con fracciones de distinto denominador. Simplifiquen los resultados cuando sea posible.

a. $\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{9}\right) =$ 1/3 − 1/9 = 3/9 − 1/9 = 2/9

b. $-\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) =$ −3/2 − 1/4 = −6/4 − 1/4 = −7/4

c. $-\frac{1}{7} + \frac{2}{14} =$ −2/14 + 2/14 = 0

d. $\frac{8}{11} - \left(-\frac{1}{22}\right) =$ 8/11 + 1/22 = 16/22 + 1/22 = 17/22

PenCrit **52.** Escriban V (verdadero) o F (falso).

a. La suma de dos fracciones positivas da siempre un resultado positivo. V

b. La resta de dos fracciones negativas da siempre un resultado negativo. F

c. La suma de dos fracciones no puede dar nunca cero. F

d. La resta de dos fracciones puede dar cero. V

e. El resultado de la suma y resta de fracciones es siempre un número racional. V

53. Escriban todos los números como fracciones y resuelvan. Simplifiquen los resultados cuando sea posible.

a. $0{,}4 - \frac{1}{2} - 0{,}\widehat{4} =$ 4/10 − 1/2 − 4/9 =
36/90 − 45/90 − 40/90 = −49/90

b. $-\frac{2}{6} + \frac{2}{3} + \left(-0{,}\widehat{7}\right) =$ −1/3 + 2/3 − 7/9 =
−3/9 + 6/9 − 7/9 = −4/9

21. Multiplicación y división

▶ SABERES DINÁMICOS

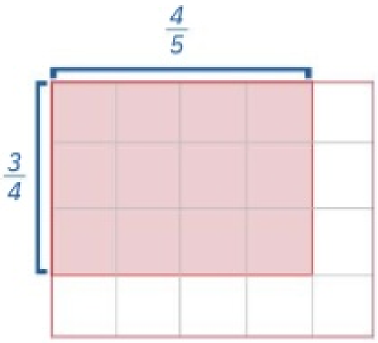
Multiplicación y división en $\mathbb{Q}_0^+$

Para **multiplicar dos o más fracciones** se deben multiplicar entre sí los numeradores de las fracciones dadas y los denominadores de esas mismas fracciones.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Para operar más sencillamente se puede simplificar cualquier numerador con cualquier denominador.

$$\frac{3}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/prop* y miren el video donde se analiza el área de un rectángulo con lados fraccionarios.

* Enlace acortado de https://youtu.be/IdwiHea43EM

El **inverso multiplicativo** de una fracción es el que se obtiene al invertir el numerador y el denominador.

$\frac{3}{4}$ *es el inverso multiplicativo de* $\frac{4}{3}$. → **Todo número racional (distinto de cero) admite inverso multiplicativo.**

Para **dividir dos fracciones** se multiplica la primera por el inverso multiplicativo de la segunda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \frac{7}{5} : \frac{3}{4} = \frac{7}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{28}{15}$$

Multiplicación y división en $\mathbb{Q}$

Cuando **se incluyen fracciones negativas en la multiplicación y en la división**, se debe tener en cuenta el signo de cada fracción y aplicar la regla de los signos.

Multiplicación: $\left(-\frac{\cancel{8}^2}{\cancel{9}_3}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_1}\right) = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$ — − . − resultado +

$\left(-\frac{\cancel{10}^1}{\cancel{9}_1}\right) \cdot \frac{\cancel{81}^9}{\cancel{70}_7} = -\frac{1 \cdot 9}{1 \cdot 7} = -\frac{9}{7}$ — − . + resultado −

División: $\left(-\frac{6}{11}\right) : 2 = \left(-\frac{\cancel{6}^3}{11}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = -\frac{3 \cdot 1}{11 \cdot 1} = -\frac{3}{11}$ — − : + resultado −

TIP

En la página 23 pueden repasar la regla de los signos.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

   a. ¿Está correctamente resuelta la siguiente división? $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$ No, se debe invertir el divisor y no el dividendo.

   b. ¿Es cierto que el inverso multiplicativo de $-\frac{23}{47}$ es $\frac{47}{23}$? No, es −47/23.

ApAp

   c. ¿Es correcto dividir $\frac{6}{25} : \frac{2}{5}$ haciendo $\frac{6:2}{25:5} = \frac{3}{5}$? ¿Cómo harían para resolver $\frac{5}{4} : \frac{1}{3}$ de la misma manera?
   Sí, siempre y cuando el numerador y el denominador del dividendo sean múltiplos del numerador y del denominador del divisor, respectivamente. Se puede hacer 15/12 : 1/3 = $\frac{15:1}{12:3} = \frac{15}{4}$

ACTIVIDADES

21. Multiplicación y división

$\mathbb{Q}_0^+$ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

54. **Resuelvan las siguientes multiplicaciones y divisiones.**

a. $\frac{7}{60} \cdot \frac{18}{21} =$ 1/10

b. $\frac{28}{15} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{12} =$ 7/12

c. $\frac{6}{13} \cdot 4 \cdot \frac{39}{16} =$ 9/2

d. $\frac{17}{6} : \frac{34}{3} =$ 17/6 . 3/34 = 1/4

e. $5 : \frac{3}{2} =$ 5 . 2/3 = 10/3

f. $\frac{120}{85} : \frac{12}{5} =$ 120/85 . 5/12 = 10/17

55. **Marquen con una X la respuesta correcta.**

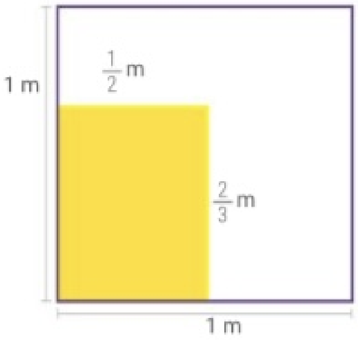
a. $1{,}2 : \frac{5}{4} =$	$\frac{24}{25}$ X	$\frac{2}{3}$	$\frac{25}{24}$
b. $1\frac{2}{5} \cdot 3\frac{2}{7} =$	$\frac{12}{35}$	$\frac{23}{5}$ X	$\frac{16}{35}$
c. $0{,}8 : 0{,}\overset{\frown}{4} =$	$\frac{5}{9}$	$\frac{9}{5}$ X	$\frac{16}{5}$
d. $\frac{1}{20} \cdot 2\frac{7}{4} =$	$\frac{3}{16}$ X	$\frac{1}{75}$	$\frac{16}{75}$

56. **Lean atentamente y resuelvan.**

Laura compró una tela cuadrada cuyo lado mide 1 m. Hizo un mantel que mide $\frac{2}{3}$ m de largo por $\frac{1}{2}$ m de ancho. Resuelvan gráficamente cuál es el área del mantel y luego verifiquen con los cálculos.

2/3 m . 1/2 m = 2/6 m² = 1/3 m²

El área del mantel es 1/3 m².



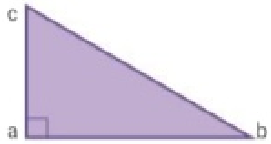
57. **Tengan en cuenta los datos y calculen el área de las siguientes figuras.**

a. Rectángulo. $\overline{ab} = \frac{2}{3}$ cm; $\overline{bc} = 0{,}25$ cm

2/3 cm . 1/4 cm = 2/12 cm² = 1/6 cm²

El área de la figura es 1/6 cm².

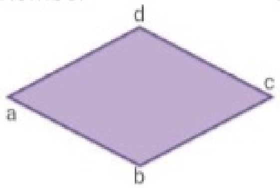
b. Triángulo rectángulo. $\overline{ac} = \frac{2}{5}$ cm; $\overline{ab} = 1\frac{7}{8}$ cm



(2/5 cm . 15/8 cm) : 2 = 3/4 cm² : 2 = 3/4 cm² . 1/2 = 3/8 cm²

El área de la figura es 3/8 cm².

c. Rombo. $\overline{ac} = \frac{10}{3}$ cm; $\overline{bd} = \frac{6}{5}$ cm



(10/3 cm . 6/5 cm) : 2 = 4 cm² : 2 = 2 cm²

El área de la figura es 2 cm².

21. Multiplicación y división

$\mathbb{Q}_0^+$ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

58. Unan con flechas cada número con su inverso multiplicativo.

- a. $\frac{2}{5}$ → $2{,}5$
- b. $0{,}7$ → $\frac{10}{7}$
- c. $\frac{1}{2}$ → 2
- d. $1\frac{5}{6}$ → $\frac{6}{11}$

59. Completen con una fracción para que se verifique la igualdad.

a. $\boxed{\frac{9}{5}} \cdot \frac{10}{3} = 6$

b. $\frac{1}{2} : \boxed{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$

c. $\boxed{\frac{26}{17}} : \frac{39}{34} = \frac{4}{3}$

d. $\boxed{\frac{18}{55}} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{11}$

60. Planteen y resuelvan.

a. Lucas compró 16 botellas de gaseosas de 2,25 l cada una para colocar el total en jarras cuya capacidad es de $\frac{3}{4}$ l. ¿Cuántas jarras necesita?

16 . 2,25 l = 36 l

36 l : 3/4 l = 36 l . 4/3 l = 48

Necesita 48 jarras.

b. Ana recorre 280 km en tres tramos. En el primer tramo recorre $\frac{2}{5}$ y en el segundo tramo recorre $\frac{2}{10}$. ¿Cuántos kilómetros recorre en el tercer tramo?

2/5 + 2/10 + x = 1 → 2/5 + 1/5 + x = 1 → 3/5 + x = 1 → x = 1 − 3/5 → x = 2/5

2/5 . 280 km = 112 km   En el tercer tramo recorre 112 km.

DinámicaMente

Reúnanse en grupos y resuelvan.

TracO

Laura y Julián resolvieron de dos maneras diferentes el siguiente problema llegando a la misma respuesta.

"De un grupo de 156 alumnos, $\frac{1}{2}$ juega al fútbol, $\frac{1}{3}$, al vóley y el resto, al rugby.

¿Cuántos alumnos juegan al rugby?"

Procedimiento de Laura	Procedimiento de Julián
Fútbol: $\frac{1}{2} \cdot 156 = 78$ Vóley: $\frac{1}{3} \cdot 156 = 52$ Rugby: $156 - (78 + 52) = 26$ Respuesta: 26 alumnos juegan rugby.	Fútbol y vóley: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ → Rugby: $\frac{1}{6}$ Rugby: $\frac{1}{6} \cdot 156 = 26$ Respuesta: 26 alumnos juegan rugby.

¿Los dos procedimientos son correctos? Expliquen la respuesta. Los dos procedimientos son correctos.

21. Multiplicación y división

Actividades para trabajar con los números racionales

PenCrit **61.** **Completen con "positivo" o "negativo" según corresponda.**

a. El producto entre dos fracciones negativas es positivo.

b. El cociente entre una fracción positiva y una fracción negativa es negativo.

c. El producto entre una fracción negativa y una fracción positiva es negativo.

62. **Resuelvan las siguientes multiplicaciones.**

a. $\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{30}{9}\right) =$ −8

b. $-\frac{11}{9} \cdot \frac{9}{5} =$ −11/5

c. $-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{18}{10}\right) =$ 9/10

d. $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{8}{15}\right) =$ −2/5

e. $-\frac{2}{5} \cdot \frac{14}{6} \cdot \left(-\frac{15}{7}\right) =$ 2

f. $-\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{30} \cdot \frac{90}{5} =$ −6/5

g. $\frac{24}{17} \cdot \left(-\frac{34}{8}\right) \cdot \left(-\frac{12}{3}\right) =$ 24

h. $-\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) \cdot \frac{20}{9} =$ 2

63. **Resuelvan las siguientes divisiones.**

a. $-\frac{1}{5} : \frac{3}{10} =$ −1/5 . 10/3 = −2/3

b. $-\frac{7}{16} : \left(-\frac{5}{4}\right) =$ −7/16 . (−4/5) = 7/20

c. $-\frac{1}{2} : 2 =$ −1/2 . 1/2= −1/4

d. $\frac{9}{20} : \left(-\frac{4}{3}\right) =$ 9/20 . (−3/4)= −27/80

e. $-2 : \frac{4}{7} =$ −2 . 7/4 = −7/2

f. $-\frac{2}{9} : \left(-\frac{9}{2}\right) =$ −2/9 . (−2/9) = 4/81

g. $\frac{18}{49} : \left(-\frac{6}{7}\right) =$ 18/49 . (−7/6)= −3/7

h. $-\frac{81}{64} : \left(-\frac{81}{64}\right) =$ −81/64 . (−64/81) = 1

64. **Marquen con una X la respuesta correcta.**

a. $0,\widehat{6} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) =$	$\frac{2}{3}$ ☐	$-\frac{2}{3}$ ☐	$-\frac{3}{2}$ X
b. $\left(-\frac{6}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) =$	$\frac{1}{10}$ X	$-\frac{1}{10}$ ☐	$\frac{6}{50}$ ☐
c. $\left(-\frac{12}{15}\right) \cdot 0,5 =$	$\frac{2}{5}$ ☐	$-\frac{2}{5}$ X	$-\frac{8}{5}$ ☐
d. $3,3 : \left(-\frac{3}{10}\right) =$	1 ☐	−11 X	11 ☐
e. $\left(-\frac{4}{17}\right) : 0,25 =$	$-\frac{16}{17}$ X	$\frac{16}{17}$ ☐	$-\frac{1}{17}$ ☐
f. $-0,75 : \left(-\frac{3}{16}\right) =$	−4 ☐	4 X	16 ☐

65. **Completen con una fracción para que se verifique la igualdad.**

a. $-\frac{9}{5} \cdot \boxed{\frac{40}{27}} = -\frac{8}{3}$

b. $3 \cdot \boxed{\frac{-7}{2}} = -\frac{21}{2}$

c. $\boxed{\frac{-1}{10}} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{15}$

d. $-\frac{12}{11} : \boxed{\frac{4}{33}} = -9$

e. $\frac{2}{5} : \boxed{\frac{-6}{7}} = -\frac{7}{15}$

f. $3 : \boxed{\frac{-13}{2}} = -\frac{6}{13}$

22. Operaciones combinadas I

▶ SABERES DINÁMICOS

Operaciones combinadas en $\mathbb{Q}_0^+$

Las **operaciones combinadas con números racionales** se resuelven siguiendo las mismas recomendaciones que para las operaciones combinadas con números enteros.

1. Se separa en términos.
2. En el caso de haber paréntesis, se resuelven las operaciones que encierran.
3. Se suprimen los paréntesis.
4. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
5. Se resuelven las sumas y restas.
6. Se simplifica, si es posible, el resultado.

Se separa en términos

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{6}-\frac{2}{5}:\frac{8}{15}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=$$ Se separa en términos.

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{6}-\frac{2}{5}:\frac{8}{15}+\left(-\frac{1}{6}\right)=$$ Se resuelve el paréntesis.

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{6}-\frac{2}{5}:\frac{8}{15}-\frac{1}{6}=$$ Se suprime el paréntesis.

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=$$ Se resuelve la división.

$$=\frac{19}{12}$$ Se resuelven las sumas y las restas.
En este caso no se puede simplificar el resultado.

Se separa en términos

$$\frac{3}{8}+\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{6}\right)-\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}=$$ Se separa en términos.

$$\frac{3}{8}+\frac{8}{3}-\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}=$$ Se resuelve el paréntesis y se suprime.

$$\frac{3}{8}+\frac{8}{3}-\frac{1}{4}=$$ Se resuelve la multiplicación.

$$=\frac{67}{24}$$ Se resuelven las sumas y las restas.
En este caso no se puede simplificar el resultado.

El siguiente problema se puede resolver usando cálculos combinados.

Tres hermanos deben recibir una herencia bajo las siguientes condiciones: Lauti recibirá un tercio del total; Vero, la mitad de lo que recibe Lauti, y Agus, el resto. ¿Qué parte de la herencia recibirá Agus?

Lauti: $\frac{1}{3}$ *Vero:* $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$ *Agus:* $1-(\text{Lauti}+\text{Vero})=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Agus recibirá $\frac{1}{2}$ de la herencia.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. En el cálculo $\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{4}:\frac{3}{8}\right)$, ¿cuántos términos iniciales hay? Hay dos términos.

b. ¿Cómo queda la operación $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)$, si se suprime primero el paréntesis? 1/3 − 2/5 + 1/4.

ApAp c. En las operaciones combinadas ¿qué relación existe entre la separación de términos y el hecho de que la suma y la resta son las últimas operaciones que se realizan?
Como se separa en términos a partir de los signos "+" y "−", es lógico que la suma y la resta sean las últimas operaciones que se realizan.

ACTIVIDADES

22. Operaciones combinadas I

Q⁺₀ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

66. Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.

a. $\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{2} - 1\right) : \frac{3}{2} - \frac{1}{2} =$ 1/3 + 3/2 . 2/3 − 1/2 =

1/3 + 1 − 1/2 =

2/6 + 6/6 − 3/6 = 5/6

b. $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{21}{20} + \frac{1}{5}\right) - \frac{9}{20} =$ (3/4 + 1/5) − 9/20 =

(15/20 + 4/20) − 9/20 =

19/20 − 9/20 = 10/20 = 1/2

c. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{9}\right) + 1 : \frac{1}{4} =$ (2/3 − 1/6) + 1 . 4 =

(4/6 − 1/6) + 4 =

3/6 + 4 = 1/2 + 8/2 = 9/2

d. $\frac{15}{12} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} : \frac{5}{8} =$ 1/2 + 1/2 . 8/5 =

1/2 + 4/5 =

5/10 + 8/10 = 13/10

e. $\frac{7}{6} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) : 2 =$ 7/6 + 1/2 . 1/2 =

7/6 + 1/4 =

14/12 + 3/12 = 17/12

f. $\frac{3}{5} - \left(\frac{1}{5} + 1\right) : \frac{12}{5} - \frac{1}{10} =$ 3/5 − 6/5 . 5/12 − 1/10 =

3/5 − 1/2 − 1/10 =

6/10 − 5/10 − 1/10 = 0

g. $\frac{5}{16} : \frac{1}{4} - \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14} - 1 =$ 5/16 . 4 − 1/4 − 1 =

5/4 − 1/4 − 1 = 0

h. $\frac{1}{9} \cdot \frac{81}{4} : \frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$ 9/4 . 2 − 3/4 =

18/4 − 3/4 = 15/4

67. Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan.

a. La suma entre el doble de un tercio y la mitad de tres cuartos. 2 . 1/3 + 1/2 . 3/4 =

2/3 + 3/8 =

16/24 + 9/24 = 25/24

b. La cuarta parte de la diferencia entre siete tercios y dos quintos. 1/4 . (7/3 − 2/5) =

1/4 . (35/15 − 6/15) =

1/4 . 29/15 = 29/60

c. La suma entre la mitad de tres quintos y un sexto de nueve cuartos. 3/5 : 2 + 1/6 . 9/4 =

3/5 . 1/2 + 3/8 =

3/10 + 3/8 =

12/40 + 15/40 = 27/40

d. La diferencia entre la tercera parte de tres medios y el doble de un quinto. 1/3 . 3/2 − 2 . 1/5 =

1/2 − 2/5 =

5/10 − 4/10 = 1/10

68. Coloquen los paréntesis en el lugar necesario para obtener los resultados.

a. $\left(\frac{5}{10} + \frac{9}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

b. $1 - \left(0{,}2 + \frac{2}{20}\right) = \frac{7}{10}$

c. $0{,}5 : \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) = \frac{4}{5}$

d. $0{,}\widehat{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} - 0{,}5\right) = \frac{37}{36}$

22. Operaciones combinadas I

$\mathbb{Q}_0^+$ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

69. **Completen la tabla.**

a	b	c	a . b – (c – a)	(a + c) : b – c	b + a . c
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$0,\widehat{6}$	5/24	8/9	13/12
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	0,4	2/25	23/30	18/25

70. **Planteen y resuelvan.**

a. En el club El atlético se realizó la votación para elegir a su presidente. Se presentaron 4 candidatos y votaron 15 400 socios. La mitad votó al candidato A, $\frac{3}{10}$ al candidato B, $\frac{1}{8}$ al candidato C y el resto votó en blanco. ¿Cuántos votos recibió cada candidato y qué fracción representa el voto en blanco?

A: 1/2 . 15 400 = 7 700 votos; B: 3/10 . 15 400 = 4 620; C: 1/8 . 15 400 = 1 925; en blanco: 1 – (1/2 + 3/10 + 1/8) =

1 – (20/40 + 12/40 + 5/40) = 1 – 37/40 = 3/40.

b. Para la fiesta de su cumpleaños Lucía compró 8 botellas de agua de 1,5 l cada una, 15 gaseosas de 2,25 l cada una y 9 cajas de jugo de 750 ml cada una.

- ¿Cuántos litros de bebida compró en total? Expresen el resultado como número mixto.

8 . 1,5 l + 15 . 2,25 l + 9 . 0,75 l = 12 l + 33,75 l + 6,75 l = 45,75 l + 6,75 l = 52,5 l

Compró 52 1/2 litros.

- Si se consumió toda la bebida llenando vasos de $\frac{1}{4}$ l de capacidad, ¿cuántos vasos se sirvieron?

52,5 l : 1/4 l = 52,5 . 4 = 210

Se sirvieron 210 vasos.

c. Mario y Juan compiten en una carrera de 1 800 m. Mario avanzó $\frac{7}{18}$ del total y Juan, $\frac{4}{9}$ del total. ¿Quién va ganando? ¿Cuántos kilómetros le faltan a cada uno?

7/18 < 4/9 porque 7/18 < 8/18. Juan va ganando.

A Juan le faltan 1 000 m (5/9 . 1 800 = 1 000), a Mario le faltan 1 100 m (11/18 . 1 800 = 1 100).

d. ¿Qué fracción de un día representan 80 minutos?

1 día = 24 h = 24 . 60 min = 24 . 60 min = 1 440 min → 1 440 minutos = 1 día → 80 minutos = 1 . 80/1 440 día = 1/18 día

80 minutos representan 1/18 de un día.

e. Andrés dice que en su clase son 42 alumnos, de los cuales $\frac{3}{6}$ son varones y $\frac{4}{7}$ son mujeres. ¿Es esto posible? ¿Por qué?

No, ya que 3/6 + 4/7 = 7/14 + 8/14 = 15/14 es mayor que un entero.

22. Operaciones combinadas I

Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

PenCrit **71. Marquen con una X los planteos correctos para cada enunciado. Luego, resuelvan.**

a. Lucía está respondiendo un cuestionario. A la mañana respondió $\frac{2}{5}$ del cuestionario y a la tarde, $\frac{4}{7}$. ¿Qué fracción le queda por resolver?

$1-\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{7}\right)$ [X]　　$1-\frac{2}{5}+\frac{4}{7}$ [ ]　　$1-\frac{2}{5}-\frac{4}{7}$ [X]

1 − (14/35 + 20/35) = 1 − 34/35 = 1/35　　35/35 − 14/35 − 20/35 = 1/35

b. Laura se fue de compras con los $2 300 que había ahorrado. Gastó $\frac{3}{10}$ en una bufanda y $\frac{1}{2}$ en una remera. Si en el viaje pagó $150, ¿cuánto dinero le quedó?

$2\,300-\frac{3}{10}-\frac{1}{2}-150$ [ ]　　$2\,300-\frac{3}{10}\,2\,300-\frac{1}{2}\,2\,300-150$ [X]　　$\left(1-\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\right)2\,300-150$ [X]

2 300 − 690 − 1 150 − 150 = 310　　(10/10 − 3/10 − 5/10) . 2 300 − 150 = 2/10 . 2 300 − 150 = 460 − 150 = 310

72. Lean los datos y sombreen la parte del siguiente rectángulo con el color que pinta cada estudiante. Luego, indiquen qué porción queda sin pintar. Solución gráfica a cargo del alumno.

Datos: 1.° estudiante pinta $\frac{1}{4}$ de gris.

2.° estudiante pinta $\frac{3}{10}$ de azul.

3.° estudiante pinta $\frac{1}{5}$ de verde.

1 − (1/4 + 3/10 + 1/5) =

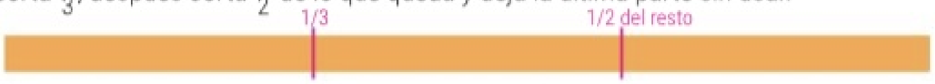
1 − (5/20 + 6/20 + 4/20) =

1 − 15/20 = 5/20 = 1/4

Queda 1/4 sin pintar.

73. Lean atentamente y resuelvan.

Andrea compró una cinta de raso color naranja como muestra el dibujo y necesita cortarla en partes. Primero corta $\frac{1}{3}$, después corta $\frac{1}{2}$ de lo que queda y deja la última parte sin usar.



a. Marquen cada parte sobre la cinta.
Las rayitas dividen la cinta en 3 partes iguales.

b. Indiquen qué fracción de la cinta no usa.

1 − (1/3 + 1/2 . 2/3) = 1 − (2/6 + 2/6) = 1 − 4/6 = 2/6 = 1/3

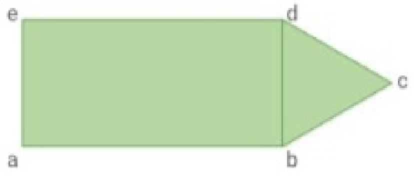
1/3 no se usa.

74. Calculen el perímetro de la figura abcde. Expresen el resultado como fracción y como número decimal.

Datos: $\overline{ab} = \frac{7}{4}$ cm

$\overline{ae} = \frac{4}{5}\,\overline{de}$

$\overset{\triangle}{bcd}$ es equilátero.



2 . 7/4 cm + 3 . 4/5 . 7/4 cm = 7/2 cm + 21/5 cm = 77/10 cm

El perímetro es igual a 77/10 cm o 7,7 cm.

23. Potenciación y radicación. Propiedades

▶ SABERES DINÁMICOS

Potenciación y radicación en $\mathbb{Q}_0^+$

Para obtener la **potencia de una fracción**, se debe calcular la potencia del numerador y la potencia del denominador.

- Para elevar una fracción a un **exponente entero positivo**, se elevan al exponente el numerador y el denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

- Para elevar una fracción a un **exponente entero negativo**, se calcula el inverso multiplicativo de la fracción y se elevan al exponente entero positivo el numerador y el denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

TIP

Todo número racional, distinto de cero, cumple que $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$. Por ejemplo: $\left(\frac{34}{43}\right)^0 = 1$.

La **raíz de una fracción** es igual a la raíz del numerador y a la del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10}$$

Las **propiedades de la potenciación y de la radicación** son las mismas que para los números enteros.

Potenciación	
Símbolos	**Ejemplos**
$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^5$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^5 : \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$
$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3$
$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$	$\left(\frac{3}{5} : \frac{4}{7}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 : \left(\frac{4}{7}\right)^4$
$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m.n}$	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

Radicación	
Símbolos	**Ejemplos**
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}}$	$\sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{16}{25}}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} : \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b} : \frac{c}{d}}$	$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} : \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64} : \frac{125}{8}}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$	$\sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{\frac{16}{25}}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b} : \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} : \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$	$\sqrt[3]{\frac{27}{64} : \frac{125}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} : \sqrt[3]{\frac{125}{8}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m.n]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\sqrt[3]{\frac{64}{729}}} = \sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

23. Potenciación y radicación. Propiedades

Potenciación y radicación en $\mathbb{Q}$

Cuando se incluyen fracciones negativas, se pueden dar los siguientes casos.

• El **exponente "n"** es un **número entero positivo**: se debe tener cuenta el signo de la base para definir el signo del resultado.

Base	Exponente Par	Exponente Impar	Ejemplos
Positiva	Resultado positivo (+)	Resultado positivo (+)	Par: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$ Impar: $\left(\frac{1}{4}\right)^{3} = \frac{1}{16}$
Negativa	Resultado positivo (+)	Resultado negativo (−)	Par: $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$ Impar: $\left(-\frac{1}{4}\right)^{3} = -\frac{1}{64}$

• El **exponente "n"** es un **número entero negativo**: se escribe el inverso multiplicativo y luego se resuelve la potencia.

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1} = \frac{5}{2}$$

• No todos los números racionales tienen raíz enésima racional.

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ *no tiene solución en Q, ya que no existe ningún número racional* $\frac{a}{b}$ *tal que* $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{3}{2}$.

• Cuando se incluyen fracciones negativas, hay algunos casos en los que no existe solución racional.

Índice par y radicando positivo

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Índice par y radicando negativo

$$\sqrt{-\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{25}} = \text{no tiene solución racional}$$

Índice impar y radicando positivo

$$\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$$

Índice impar y radicando negativo

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{125}} = -\frac{1}{5}$$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es correcta la igualdad $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{8}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{8}}$? Sí. La radicación es distributiva respecto de la multiplicación.

b. ¿Es correcta la igualdad $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{5}\right)^6$? No. La potenciación no es distributiva respecto de la suma.

ApAp

c. ¿Es cierto que $\frac{2^3}{5}$ da el mismo resultado que $\left(\frac{2}{5}\right)^3$? ¿Por qué?

No. En la primera expresión el cubo afecta solo al numerador y en la segunda afecta tanto al numerador como al denominador.

ACTIVIDADES

23. Potenciación y radicación. Propiedades

$\mathbb{Q}_0^+$ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

75. Calculen las siguientes potencias.

a. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 =$ 1/64

b. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} =$ $(5/2)^2 = 25/4$

c. $0{,}3^{-2} =$ $(3/10)^{-2} = (10/3)^2 = 100/9$

d. $\left(\frac{11}{6}\right)^2 =$ 121/36

e. $0{,}\widehat{2}^4 =$ $(2/9)^4 = 16/6\,561$

f. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} =$ $(2/3)^5 = 32/243$

76. Calculen las siguientes raíces cuando sea posible.

a. $\sqrt{\frac{1}{100}} =$ 1/10

b. $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$ 1/2

c. $\sqrt{\frac{64}{81}} =$ 8/9

d. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} =$ 2/3

e. $\sqrt{0{,}25} =$ 0,5

f. $\sqrt{0{,}\widehat{1}} =$ $\sqrt{1/9} = 1/3$

77. Completen los espacios vacíos en los siguientes cálculos.

a. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\boxed{4}} = \frac{1}{625}$

b. $\left(\boxed{\frac{12}{5}}\right)^{-2} = \frac{25}{144}$

c. $\sqrt{\boxed{\frac{169}{49}}} = \frac{13}{7}$

d. $\sqrt[\boxed{4}]{\frac{16}{81}} = 0{,}\widehat{6} =$

78. Calculen y representen los resultados racionales en la recta numérica.

a. $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}} = \frac{1}{2}$

b. $\left(\frac{1}{0{,}\widehat{3}}\right)^2 =$ 9

c. $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} =$ $\sqrt{2}$ no es racional.

d. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{-2} = \frac{1}{9}$

79. Resuelvan aplicando propiedades.

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (2^{-1})^2 =$ $(1/2)^{3+3} \,.\, (1/2)^2 = (1/2)^{6+2} = (1/2)^8 = 1/256$

b. $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ $(2/3)^2 : (2/3)^3 = (2/3)^{2-3} = (2/3)^{-1} = 3/2$

c. $\sqrt{\frac{81}{25} \cdot \frac{100}{16}} =$ $\sqrt{81/25} \,.\, \sqrt{100/16} = 9/5 \,.\, 10/4 = 9/2$

d. $\sqrt[4]{\frac{1}{81} : \frac{256}{625}} =$ $\sqrt[4]{1/81} : \sqrt[4]{256/625} = 1/3 : 4/5 = 1/3 \,.\, 5/4 = 5/12$

80. Planteen y resuelvan.

a. Un cuadrado tiene por área $\frac{225}{4}$ cm². ¿Cuál es su perímetro?

Lado del cuadrado: $\sqrt{225/4 \text{ cm}^2} = 15/2$ cm

Perímetro del cuadrado: 4 . 15/2 = 30 cm

b. El volumen de un cubo es igual a $12\frac{19}{27}$ cm³. ¿Cuánto mide la arista del cubo?

Arista del cubo: $\sqrt[3]{343/27 \text{ cm}^3} = 7/3$ cm

23. Potenciación y radicación. Propiedades

Q Actividades para trabajar con los números racionales

81. Calculen las siguientes potencias.

a. $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 =$ 4/49

b. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 =$ 1/9

c. $\left(-\frac{13}{8}\right)^0 =$ 1

d. $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-1} =$ −7/2

e. $(-0,\widehat{3})^4 =$ $(-1/3)^4 = 1/81$

f. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} =$ $(-5)^2 = 25$

82. Calculen las siguientes raíces cuando sea posible.

a. $\sqrt{-\frac{1}{4}} =$ No es posible en Q.

b. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$ −2/3

c. $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}} =$ No es posible en Q.

d. $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} =$ −2/3

e. $\sqrt[6]{-0,001} =$ No es posible en Q.

f. $\sqrt[3]{-0,001} =$ −0,1

83. Completen los espacios vacíos en los siguientes cálculos.

a. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{\boxed{3}} = -\frac{8}{27}$

b. $\left(\boxed{-\frac{1}{4}}\right)^5 = -\frac{1}{1\,024}$

c. $\sqrt[3]{\boxed{\frac{-1}{125}}} = -\frac{1}{5}$

d. $\sqrt[\square]{\frac{256}{81}} = -1,\widehat{3} =$ No se puede resolver. El resultado de una raíz positiva es positivo

PenCrit **84.** Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas falsas.

a. Si $\left(\frac{11}{13}\right)^m = 1$, entonces m = 1. F m = 0

b. Si $\sqrt[m]{-\frac{9}{16}}$ no tiene solución en Q, entonces "m" es par. V

c. Si $P = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^5$, entonces $P = \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{3}{4}\right)^5$. F La potencia no es distributiva respecto de la resta.

d. Si $\sqrt[3]{\sqrt[m]{\frac{1}{64}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$, entonces m = 3. F m = 2

e. Si $\left(\frac{10}{7}\right)^m = \frac{49}{100}$, entonces m = 2. F m = −2

85. Resuelvan aplicando propiedades.

a. $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^2 : \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} =$ $(-3/4)^{-1.2} : (-3/4)^{-3} =$
$(-3/4)^{-2-(-3)} = (-3/4)^{-2+3} = (-3/4)^1 = -3/4$

b. $\sqrt[5]{-\frac{243}{32} : \frac{1}{1\,024}} =$ $\sqrt[5]{-243/32} : \sqrt[5]{1/1\,024} =$
$-3/2 : 1/4 = -3/2 \,.\, 4 = -6$

86. Planteen y resuelvan.

¿Cuál es el resultado de la suma entre el cubo del inverso de 2 y la raíz cuadrada del opuesto de $-\frac{1}{16}$?

$(2^{-1})^3 + \sqrt{-(-1/16)} = (1/2)^3 + \sqrt{1/16} = 1/8 + 1/4 = 1/8 + 2/8 = 3/8$

24. Operaciones combinadas II

▶ SABERES DINÁMICOS

Operaciones combinadas con potenciación y radicación $\mathbb{Q}_0^+$

Para resolver un cálculo **combinando las seis operaciones**, se debe tener en cuenta el orden de resolución de las operaciones, que es el mismo que para resolver los cálculos combinados con números enteros.

En caso de que haya **paréntesis y corchetes**, se resuelven primero los cálculos que ellos encierran respetando la jerarquía de las operaciones.

Ejemplos	
$\sqrt[3]{1-\frac{7}{8}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\left(1-\frac{3}{4}\right).\,3=$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}:\frac{1}{2}+\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{9}}\right]=$
$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}.\,3=$	$\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}:\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=$
$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Uso de la calculadora científica para resolver operaciones en $\mathbb{Q}_0^+$

Si bien hay diversos modelos de calculadoras, en la mayoría las teclas grises inferiores realizan las operaciones básicas y las teclas superiores, otras operaciones específicas.

Para resolver algunas operaciones se presiona directamente la tecla correspondiente; para otras es necesario presionar primero la tecla SHIFT y luego la tecla que tiene escrito arriba en amarillo la operación que se desea calcular.

Cálculo	Procedimiento en la calculadora
$\frac{8}{5}$	Presionar las teclas en este orden: 8 ab/c 5
$\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$	Presionar las teclas en este orden: (1 ab/c 2) ^ 5
$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$	Presionar las teclas en este orden: 3 SHIFT ^ (1 ab/c 8)

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/calcu* y miren el video donde se explica cómo se utilizan las calculadoras científicas para realizar operaciones con fracciones.

* Enlace acortado de https://youtu.be/TVRP5XZIp5c

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Cuántos términos tiene la expresión $\frac{1}{5}+\sqrt{1-\frac{3}{4}}:3$? Dos términos.

b. ¿Es cierto que al resolver con la calculadora $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ da el mismo resultado que $\frac{2^2}{3}$? No. En la primera expresión el cuadrado afecta al numerador y al denominador y en la segunda afecta solo al numerador.

c. Indiquen el procedimiento adecuado para escribir el número $3\,\frac{5}{6}$ en la calculadora.

3 + 5/6.

ACTIVIDADES

24. Operaciones combinadas II

$\mathbb{Q}^+_0$ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

87. Planteen y resuelvan.

a. El cociente entre el cuadrado de dos quintos y la raíz cúbica de un octavo.

$(2/5)^2 : \sqrt[3]{1/8} = 4/25 : 1/2 = 4/25 \, . \, 2 = 8/25$

b. La suma entre un quinto y el cuadrado de la diferencia entre uno y un tercio.

$1/5 + (1 - 1/3)^2 = 1/5 + (2/3)^2 = 1/5 + 4/9 = 9/45 + 20/45 = 29/45$

c. La mitad del cubo de la suma entre un cuarto y un tercio.

$(1/4 + 1/3)^3 : 2 = (3/12 + 4/12)^3 : 2 = (7/12)^3 : 2 = 343/1\,728 : 2 = 343/3\,456$

d. El producto entre el inverso de tres séptimos y el cuadrado de un medio.

$(3/7)^{-1} \, . \, (1/2)^2 = 7/3 \, . \, 1/4 = 7/12$

88. Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.

a. $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}} - \left(\frac{1}{5}\right)^4 : \left(\frac{1}{5}\right)^3 + 1 = \sqrt{3/5} \, . \, \sqrt{3/5} - (1/5)^{4-3} + 1 =$

$\sqrt{(3/5)^2} - 1/5 + 1 = 3/5 - 1/5 + 5/5 = 7/5$

b. $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{5} + \frac{6}{25}} =$

$(6/15 + 5/15)^{-1} + 1/2 \, . \, \sqrt{10/25 + 6/25} =$

$(11/15)^{-1} + 1/2 \, . \, \sqrt{16/25} = 15/11 + 1/2 \, . \, 4/5 = 15/11 + 2/5 = 97/55$

c. $2,\widehat{6} + \left(\frac{1}{3} + 1\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{8}{27}} : \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = 24/9 + (4/3)^2 - 2/3 : 3/2 =$

$24/9 + 16/9 - 2/3 \, . \, 2/3 = 24/9 + 16/9 - 4/9 = 4$

d. $\sqrt{\left(\frac{16}{3} + 1,2\right) \cdot \left(\frac{35}{6} - 2,5\right)} + \frac{5}{3} = \sqrt{(16/3 + 6/5) \, . \, (35/6 - 5/2)} + 5/3 =$

$\sqrt{(80/15 + 18/15) \, . \, (35/6 - 15/6)} + 5/3 = \sqrt{98/15 \, . \, 10/3} + 5/3 =$

$\sqrt{196/9} + 5/3 = 14/3 + 5/3 = 19/3$

e. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt[4]{\frac{625}{81}} - \sqrt[3]{\frac{64}{27}} + \frac{1}{6} = 5/3 : 1/4 + 5/3 - 4/3 + 1/6 =$

$5/3 \, . \, 4 + 5/3 - 4/3 + 1/6 = 20/3 + 5/3 - 4/3 + 1/6 = 7 + 1/6 = 43/6$

f. $\sqrt{\frac{8^2}{121} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} : \frac{4}{15}\right)^{-2}} = \sqrt{64/121 + (1/3 + 2/5 \, . \, 15/4)^{-2}} =$

$\sqrt{64/121 + (1/3 + 3/2)^{-2}} = \sqrt{64/121 + (2/6 + 9/6)^{-2}} = \sqrt{64/121 + (11/6)^{-2}} =$

$\sqrt{64/121 + 36/121} = \sqrt{100/121} = 10/11$

Trac0

89. Reúnanse con un compañero. Organícense para que en el primer cálculo uno de ustedes resuelva con la calculadora y el otro sin ella y en el segundo, al revés. Luego, comparen los resultados.

Cálculo combinado	Resolvió sin calculadora	Resolvió con calculadora
$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} - \frac{5}{4} : \left(\frac{5}{2}\right)^3 =$	$4/5 - 5/4 \, . \, 8/125 =$ $20/25 - 2/25 = 18/25$	18/25
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} =$	$1/16 + 2/3 \, . \, 1/2 =$ $1/16 + 1/3 = 3/48 + 16/48 = 19/48$	19/48

$\mathbb{Q}_0^+$ Números racionales positivos y el cero

90. Resuelvan las siguientes operaciones combinadas

a. $\frac{1}{2} + \left(\frac{7}{4} - 1\right) : \frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$ 7/6

b. $\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{17}{8} - \frac{3}{8}\right) - \frac{15}{16} =$ 15/8

c. $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\right) + 2 : \frac{1}{8} =$ 50/3

d. $\frac{25}{24} \cdot \frac{12}{5} - \frac{1}{8} : \frac{1}{4} =$ 2

e. $\frac{5}{3} + \left(2 - \frac{1}{3}\right) : 3 =$ 20/9

f. $\frac{7}{4} - \left(\frac{1}{4} + 2\right) : \frac{18}{11} - \frac{1}{8} =$ 1/4

g. $\frac{7}{11} : \frac{21}{44} - \frac{13}{3} \cdot \frac{4}{26} =$ 2/3

h. $\frac{1}{6} \cdot \frac{27}{8} : \frac{3}{4} - \frac{3}{5} =$ 3/20

91. Completen la tabla.

a	b	c	a + b . c	(b − c) : a
0,4	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	23/50	5/4
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	0,2	1/2	3/4
$\frac{1}{10}$	0,8	0,4	21/50	4

92. Completen el exponente que corresponde aplicando propiedades de la potenciación.

a. $\left(\frac{7}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^5 : \left[\left(\frac{7}{5}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{7}{5}\right)^{\boxed{2}}$

b. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^4\right]^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\boxed{10}}$

c. $\left[\left(\frac{3}{8}\right)^5 : \left(\frac{3}{8}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{3}{8}\right)^{\boxed{8}}$

d. $2^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{13}}$

93. Planteen el cálculo y resuelvan.

a. El cociente entre la raíz cuadrada de un noveno y el inverso multiplicativo de dos tercios.
2/9

b. Las nueve quintas partes del cuadrado de la suma entre un tercio y un sexto.
9/20

c. La diferencia entre catorce tercios y la raíz cuadrada del doble de setenta y dos novenos.
2/3

$\mathbb{Q}_0^+$ Números racionales positivos y el cero

94. Resuelvan los cálculos combinados.

a. $\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}} - \left(\frac{1}{4}\right)^9 : \left(\frac{1}{4}\right)^7 + \frac{1}{2} =$ 47/16

b. $0,\widehat{6} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{1}{27}} : \sqrt[4]{\frac{1}{81}} =$ 1/9

c. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{100}} - \frac{4}{50} =$ 1/25

95. Lean atentamente y resuelvan.

a. Lucrecia destina un tercio de su sueldo al pago del alquiler del departamento donde vive, un octavo al pago de los impuestos, un sexto en comida y viáticos y el resto lo ahorra.

- ¿Qué parte de su sueldo ahorra?
3/8 de su sueldo.
- Si el dinero que ahorra por mes es $18 000, ¿cuál es su sueldo?
Su sueldo es de $48 000.

b. Julio va todos los sábados desde su casa al club. Un cuarto del camino lo hace en colectivo, un sexto a pie y los 7 km restantes los hace en tren.

- ¿Qué parte del camino hace en tren?
7/12 del camino.
- ¿Cuántos kilómetros hay entre su casa y el club?
Hay 12 km.

c. Fabiana leyó un libro en tres semanas. La primera semana leyó la quinta parte del libro y la segunda semana, un tercio.

- ¿Qué parte leyó en la tercera semana?
Leyó 7/15.
- Si el libro tiene 120 páginas, ¿cuántas páginas leyó cada semana?
1ra: 24 pág., 2da: 40 pág., 3ra: 56 pág.

d. La abuela de Laura, Darío y Ana tenía caramelos en un frasco para sus nietos. Si Laura comió un cuarto, Darío comió dos quintos y Ana comió un séptimo, ¿quedan caramelos?
Sí. Quedan 29/140.

e. En una rotisería se prepararon 18 docenas de empanadas. Se vendieron cuatro novenos durante la mañana y cinco doceavos por la tarde.

- ¿Qué parte del total se vendió ese día?
Se vendió 31/36.
- ¿Cuántas empanadas quedaron sin vender?
Quedaron 30 empanadas sin vender.

Q Números racionales

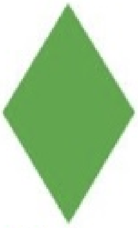
96. Encuentren lo pedido en cada figura.

a. Área = $\frac{81}{196}$ cm²

Perímetro del cuadrado: 18/7 cm.

b. Diagonal menor (d) = $\frac{2}{3}$ cm²

Diagonal mayor (D) = d^2



Área del rombo: 4/27 cm².

97. Completen la tabla.

a	b	c	a + b . c	(b − c) : a
$\frac{1}{3}$	$-0,\widehat{3}$	$\frac{5}{4}$	−1/12	−19/4
$-\frac{2}{3}$	$1\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	−169/96	−57/16
$-\frac{2}{5}$	−0,3	0,6	−29/50	9/4

98. Completen el exponente que corresponde aplicando propiedades de la potenciación.

a. $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 . \left(-\frac{1}{4}\right)^4 . \left[\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right]^{-2} = -4^{-2}$

b. $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^3 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5}\right]^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{24}$

c. $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^7 : \left(-\frac{2}{5}\right)^4\right]^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{6}$

d. $-6^{-3} . \left(-\frac{1}{6}\right)^3 . \left[\left(-\frac{1}{6}\right)^3\right]^3 = \left(-\frac{1}{6}\right)^{15}$

Q Números racionales

99. Resuelvan con la calculadora.

a. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} . \sqrt{\frac{1}{9}} =$ 1/16 + 3/2 . 1/3 = 1/16 + 1/2 = 1/16 + 8/16 = 9/16

b. $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}} : \frac{2}{5} - \frac{1}{2} =$ −2/5 . 5/2 − 1/2 = −1 − 1/2 = −3/2

c. $\left[2^{-2} + \frac{1}{4}\right] . \sqrt{\frac{1}{64}} =$ (1/4 + 1/4) . 1/8 = 1/2 . 1/8 = 1/16

d. $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} . \sqrt{\frac{1}{100}} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 =$ 1/5 . 1/10 + 1/25 = 1/50 + 2/50 = 3/50

100. Planteen el cálculo y resuelvan.

a. La diferencia entre el cuadrado de menos un quinto y la tercera parte del opuesto de tres quintos.

$(-1/5)^2 - 1/3 . (-3/5) = 6/25$

b. El producto entre dos novenos y la raíz cuadrada de la suma entre diez novenos y el opuesto de dos tercios.

$2/9 . \sqrt{10/9 + (-2/3)} = 4/27$

c. La suma entre la raíz cúbica del opuesto de un octavo y el cuadrado de un medio.

$\sqrt[3]{-1/8} + (1/2)^2 = -1/4$

101. Encuentren el valor de cada expresión.

a. $A . \sqrt{C + B} =$ Siendo $A = \frac{3}{14}$, $B = \frac{5}{6}$; $C = \frac{19}{36}$

1/4

b. $\sqrt[5]{M} + P . R =$ Siendo $M = -\frac{1}{32}$, $P = 2,5$; $R = \frac{10}{3}$

47/6

c. $\sqrt[3]{W . Q} + \sqrt{T} =$ Siendo $W = -\frac{2}{3}$, $Q = 0,\widehat{4}$; $T = \frac{1}{36}$

−1/2

d. $\sqrt{(H + J) . K} =$ Siendo $H = 0,5$, $J = \frac{1}{3}$; $K = \frac{5}{6}$

5/6

102. Resuelvan los cálculos combinados.

a. $\sqrt{\left(\frac{8}{11}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} . \frac{15}{2}\right)^{-2}} =$ 10/11

b. $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{3}{4} . \sqrt{\frac{25}{144}} - \frac{7}{16} - \frac{7}{32} =$ −21/64

c. $\left(1 - \frac{2}{5}\right)^{-1} + 0,5 . \sqrt{\frac{20}{50} + \frac{6}{25}} - \frac{1}{15} =$ 2

d. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-3} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}} + 2 . \frac{3}{8} =$ 11/8

25. Ecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Ecuaciones en $\mathbb{Q}_0^+$

Resolver una **ecuación** consiste en encontrar el valor de la incógnita que verifica la igualdad.
Para resolver ecuaciones en el conjunto de los números racionales, se usan las mismas propiedades que para los números enteros.

$$\frac{1}{2}x + 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{4}$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = \frac{5}{4}$$
$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{4} - \frac{3}{8}$$
$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{8}$$
$$x = \frac{7}{8} : \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{7}{4}$$

Verificación:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} + 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{4}$$
$$\frac{7}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{4}$$
$$\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$
$$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

La ecuación está bien resuelta.

Ecuaciones en $\mathbb{Q}$

Cuando se incluyen fracciones negativas en las ecuaciones en las cuales la incógnita está afectada por un exponente par, se deben considerar las dos soluciones que tiene la ecuación.

$$-\frac{1}{3} + x^2 = \left(\frac{12}{71}\right)^{-1}$$
$$-\frac{1}{3} + x^2 = \frac{71}{12}$$
$$x^2 = \frac{71}{12} + \frac{1}{3}$$
$$x^2 = \frac{25}{4}$$
$$x^2 = \frac{25}{4}$$
$$|x| = \frac{5}{2} \rightarrow x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{5}{2}$$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/ecufra* y miren el video donde se explica otra forma de resolver ecuaciones con fracciones.

* Enlace acortado de https://youtu.be/DAJMj1trT5E

TIP

Cuando "n" es par $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

$|x| = k \rightarrow x_1 = k$
$ \rightarrow x_2 = -k$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que $\frac{1}{2}$ es solución de la siguiente ecuación? $x - \frac{1}{2}x = 0$ No. $x = 0$

b. La expresión $\frac{2}{5}x + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}x$, ¿es equivalente a la expresión $4x + 1 = 5x$? Sí. Se multiplica a ambos miembros por 10.

ApAp c. Indiquen cuántas soluciones tiene cada ecuación.

- $x^2 = \frac{4}{25}$ — 2 soluciones.
- $x^2 = 0$ — 1 solución.
- $x^2 = -\frac{4}{25}$ — No tiene.
- $x^3 = -\frac{8}{27}$ — 1 solución.
- $x^3 = \frac{9}{32}$ — No tiene

25. Ecuaciones

Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

103. Traduzcan al lenguaje simbólico y hallen el valor del número.

a. La mitad de la suma entre un número y un cuarto es igual a dos séptimos.

(x + 1/4) : 2 = 2/7

x + 1/4 = 2/7 . 2

x = 4/7 − 1/4

x = 16/28 − 7/28 → x = 9/28

b. La raíz cúbica de la diferencia entre un número y el cuadrado de un medio es igual al producto entre un cuarto y un octavo.

$\sqrt[3]{x - (1/2)^2}$ = 4 . 1/8

x − 1/4 = $(1/2)^3$

x = 1/8 + 1/4

x = 1/8 + 2/8 → x = 3/8

c. La tercera parte de la diferencia entre un número y un décimo es igual a cuatro tercios.

1/3 . (x − 1/10) = 4/3

x − 1/10 = 4/3 . 3

x = 4 + 1/10

x = 41/10

d. El cociente entre un quinto de un número y un tercio es igual al producto entre un sexto y dos quintos.

1/5x : 1/3 = 1/6 . 2/5

1/5x = 1/15 . 1/3

x = 1/45 . 5

x = 1/9

104. Escriban en lenguaje coloquial y luego resuelvan.

a. $\left(\frac{1}{5} + x\right)^3 = \frac{1}{8}$ El cubo de la suma entre un quinto y un número es igual a un octavo.

1/5 + x = $\sqrt[3]{1/8}$ x = 1/2 − 1/5 → x = 5/10 − 2/10 → x = 3/10

b. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \sqrt{4^{-1}}$ La diferencia entre la mitad de un número y un cuarto es igual a la raíz cuadrada del inverso de cuatro.

1/2 x = 1/2 + 1/4 → 1/2 x = 2/4 + 1/4 → x = 3/4 . 2 → x = 3/2

c. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}x} = \frac{1}{2}$ La raíz cúbica de un cuarto de un número es igual a un medio.

1/4 x = $(1/2)^3$ → x = 1/8 . 4 → x = 1/2

d. $\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ Las dos terceras partes de la diferencia entre un número y tres medios es igual al cuadrado de un cuarto.

x − 3/2 = 1/16 . 3/2 → x = 3/32 + 3/2 → x = 3/32 + 48/32 → x = 51/32

25. Ecuaciones

$\mathbb{Q}_0^+$ Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

105. Resuelvan las siguientes ecuaciones aplicando primero la propiedad distributiva.

a. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\right) : \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

1/2x . 3 − 5/6 . 3 = 1/6

3/2x − 5/2 = 1/6

3/2x = 1/6 + 15/6

x = 8/3 . 2/3 → x = 16/9

b. $\frac{1}{5} - 0{,}5\left(\frac{3}{5}x - 2\right) = 1$

−3/10x + 1 = 1 − 1/5

−3/10x = 4/5 − 1

x = −1/5 . (−10/3)

x = 2/3

c. $0{,}\widehat{9}\left(x - \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{5}{7}\right)^2$

x − 1/7 = 25/49

x = 25/49 + 1/7

x = 25/49 + 7/49

x = 32/49

d. $\frac{1}{7}\left(\frac{7}{5}x + \frac{14}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(4x + \frac{2}{5}\right)$

1/5x + 2/5 = 2x + 1/5

2/5 − 1/5 = 2x − 1/5x

1/5 = 9/5x

1/5 . 5/9 = x → x = 1/9

106. Resuelvan las siguientes ecuaciones en la carpeta y unan cada una con la solución correspondiente.

a. $\frac{3}{5}(x - 2) + 0{,}7(3 - x) = \frac{8}{5}(x - 1)$ → • $x = \frac{25}{17}$

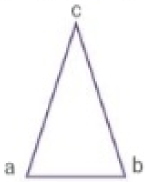
b. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6} - \sqrt[3]{\frac{125}{216}} - \frac{x}{3} = 0{,}\widehat{6}\,x - \sqrt{\frac{100}{9}}$ → • $x = \frac{16}{3}$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^8 : \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \sqrt[5]{\frac{1}{32}}x = \frac{1}{4} - 2^{-1}x + \frac{5}{2}$ → • $x = \frac{9}{4}$

d. $\left(\frac{1}{11} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^0 + \sqrt{x - \frac{1}{9}} = \frac{11}{9}$ → • $x = \frac{13}{81}$

107. Calculen el valor de "x" y el perímetro de cada figura.

a. Triángulo isósceles abc; $\overline{ab} = \frac{3}{2}$ cm; $\overline{ac} = \frac{1}{2} + 4x$; $\overline{bc} = 2(x + 1) + \frac{7}{2}$

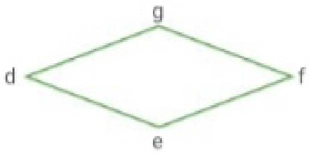


1/2 + 4x = 2(x + 1) + 7/2 → 1/2 + 4x = 2x + 2 + 7/2 → 4x − 2x = 2 + 7/2 − 1/2 → 2x = 10/2 → x = 5/2 cm

Perímetro: 3/2 + 1/2 + 4x + 2(x + 1) + 7/2 → 3/2 + 1/2 + 4 . 5/2 + 2(5/2 + 1) + 7/2 →

3/2 + 1/2 + 10 + 5 + 2 + 7/2 = 45/2 → Perímetro: 45/2 cm

b. Rombo defg; $\overline{de} = x + \frac{5}{9}$; $\overline{fg} = \frac{1}{2}x + \frac{13}{18}$



x + 5/9 = 1/2x + 13/18 → x − 1/2x = 13/18 − 5/9 → 1/2x = 13/18 − 10/18 →

x = 1/6 . 2 → x = 1/3 cm

Perímetro: 4 . (x + 5/9) = 4 . (1/3 + 5/9) = 4 . (3/9 + 5/9) = 4 . 8/9 = 32/9 → Perímetro: 32/9 cm

25. Ecuaciones

Actividades para trabajar con los números racionales

108. Completen la tabla.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	Número
El producto entre el cuadrado de un número y un noveno es igual al inverso multiplicativo de cuatro.	$x^2 \cdot 1/9 = 4^{-1}$	±1/2
La tercera parte de la suma entre un número y 1 es igual al cuadrado de un sexto.	$\frac{x+1}{3} = \left(\frac{1}{6}\right)^2$	−11/12
La raíz cúbica de la suma entre tres cuartos y veintiún octavos es igual al opuesto del triple de un número.	$\sqrt[3]{3/4 + 21/8} = -3x$	−1/2
La diferencia entre la mitad de un número y el opuesto de un quinto es igual al cuadrado de tres quintos.	$\frac{1}{2}x - \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2$	8/25

109. Resuelvan las siguientes ecuaciones aplicando primero la propiedad distributiva.

a. $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}x\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$1/6 + 1/5x = 1/2$

$1/5x = 3/6 - 1/6$

$x = 1/3 \cdot 5 \rightarrow 5/3$

b. $\frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$

$1/3x^2 + 1/12 = 5/12$

$1/3x^2 = 5/12 - 1/12$

$x^2 = 1/3 \cdot 3$

$x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$

c. $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}\right) : \frac{15}{2} = \frac{1}{15}$

$1/10x^2 + 1/45 = 1/15$

$1/10x^2 = 3/45 - 1/45$

$x^2 = 2/45 \cdot 10$

$x = \pm\sqrt{4/9} \rightarrow x = \pm 2/3$

d. $\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}x\right) : \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

$1/2 + 3/2x + 3/4x - 3/8 = 5/8$

$6/4x + 3/4x = 5/8 - 4/8 + 3/8$

$9/4x = 1/2$

$x = 1/2 \cdot 4/9 \rightarrow x = 2/9$

PenCrit **110.** Marquen los errores en la solución de la siguiente ecuación.

$$\frac{1}{4}\sqrt{x + \frac{1}{9}} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{x + \frac{1}{9}} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x + \frac{1}{9}} = \frac{1}{6} : \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{x} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{3}$$

$$|x| = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$x_1 = \frac{1}{9} \text{ o } x_2 = -\frac{1}{9}$$

1.er error: en vez de hacer el inverso, se hace el opuesto de 1/3.

2.do error: se distribuye la radicación respecto de la suma.

3.er error: al elevar al cuadrado no se debe aplicar la definición de valor absoluto.

26. Problemas con ecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Problemas con ecuaciones en $\mathbb{Q}_0^+$

Hay **problemas** que se pueden resolver **planteando ecuaciones** con números racionales.

Las siguientes son algunas recomendaciones para plantear la ecuación correspondiente al problema.

- Entender el problema: ¿Con qué datos se cuenta? ¿Se puede "dibujar" el problema? ¿Qué es lo que hay que encontrar y con qué letra se designa esa incógnita?
- Buscar la estrategia para resolverlo: ¿Cuál es la ecuación correspondiente que relaciona los datos con la incógnita y permite hallar lo pedido?
- Resolver y comprobar: ¿Es correcta la solución? ¿Cuál es la respuesta del problema?

El siguiente problema se puede resolver planteando una ecuación.

Julián repartió entre sus amigos la tercera parte de los caramelos que tenía y un sexto del resto entre sus primos. Si le quedan sin repartir 35 caramelos, ¿cuántos tenía en total?

Datos dados en el enunciado	Traducción algebraica	Planteo y solución de la ecuación
Total de caramelos que tenía Julián	x	$x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} . \frac{2}{3}x = 35$ $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x = 35$ $\frac{5}{9}x = 35$ $x = 35 : \frac{5}{9}$ $x = 63$ *Julián tenía 63 caramelos.*
Reparte entre sus amigos	$\frac{1}{3}x$	
Reparte entre sus primos	$\frac{1}{6} . \frac{2}{3}x$	
Le quedan	35	

Áreas dinámicas [Matemática y Geografía]

Al medir la distancia entre dos ciudades en un mapa que informa la escala, se puede calcular la distancia real entre esas ciudades usando ecuaciones. Una escala es el cociente entre la magnitud representada y la magnitud real.

$$E = \frac{\text{magnitud representada}}{\text{magnitud real}}$$

Por ejemplo, si un mapa tiene una escala 1 : 1 000 000, significa que cada centímetro representado equivale a 1 000 000 cm en la realidad. Si en ese mapa la distancia entre dos ciudades es de 5 cm, la distancia real (x) se calcula:

$$\frac{1}{1\,000\,000} = \frac{5 \text{ cm}}{x} \rightarrow \frac{1}{1\,000\,000} = 5 \text{ cm} \rightarrow x = 5 \text{ cm} . 1\,000\,000 \rightarrow x = 5\,000\,000 \text{ cm}$$

La distancia real entre las dos ciudades es 5 000 000 cm = 500 000 m = 500 km.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Indiquen si es posible resolver el siguiente problema. "Luz gastó la mitad de sus ahorros en un viaje a Brasil. Si su sueldo es de $41 500 por mes, ¿cuánto le salió el viaje?"
   b. ¿Es posible leer la tercera parte de un libro y después los trece quinceavos de ese libro?
   c. ¿Cuántas soluciones tiene este problema? "¿Cuál es la medida de cada lado de un cuadrado de área $\frac{4}{9}$ cm²? Se puede resolver $x^2 = \frac{4}{9}$."

ApAp

a. No. No se sabe cuánto ahorró.
b. No porque supera un entero.
c. Tiene una solución: x = 2/3.

ACTIVIDADES

26. Problemas con ecuaciones

Actividades para trabajar con los números racionales positivos y el cero

111. Planteen la ecuación y resuelvan.

a. La base de un rectángulo mide $\frac{5}{3}$ de su altura. ¿Cuál es el área del rectángulo si su perímetro es 32 cm?

2 . (b + h) = 32 cm → 2 . (5/3 h + h) = 32 cm → 8/3 h = 32 cm : 2 → h = 16 cm . 3/8 → h = 6 cm

b = 5/3 . 6 cm → b = 10 cm b . h = 10 cm . 6 cm = 60 cm² El área es de 60 cm².

b. Si la edad de Ignacio es $\frac{1}{3}$ de la de Juan y ambas edades suman 28 años, ¿cuántos años tiene cada uno?

I = 1/3 J; I + J = 28 → 1/3 J + J = 28 → 4/3 J = 28 → J = 28 . 3/4 → J = 21

I = 1/3 . 21 → I = 7 Juan tiene 21 años e Ignacio, 7.

c. Fabiana gastó sus ahorros de la siguiente manera: $\frac{1}{4}$ en la compra de un pantalón y $\frac{2}{3}$ del resto en un par de zapatillas. Si le sobraron $1 630, ¿cuánto dinero tenía ahorrado Fabiana?

1/4x + 2/3 . 3/4x + $1 630 = x → 1/4x + 1/2x + $1 630 = x → 3/4x + $1 630 = x →

$1 630 = x − 3/4x → $1 630 = 1/4x → $1 630 . 4 = x → $6 520 = x Fabiana tenía ahorrados $6 520.

d. Alejandro compró una bolsa de alimento para su mascota. La primera semana se consumió $\frac{1}{6}$ de la bolsa; la segunda semana, $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba y en la tercera semana, 2,125 kg. Si en la bolsa quedan $\frac{29}{4}$ kg, ¿de cuántos kilos era la bolsa de alimento que compró Alejandro?

1/6x + 1/4 . 5/6x + 2,125 kg + 29/4 kg = x → 4/24x + 5/24x + 2,125 kg + 7,25 kg = x → 9/24x + 9,375 kg = x → 9,375 kg = x − 9/24x →

9,375 kg = 15/24x → 9,375 kg . 24/15 = x → 15 kg = x La bolsa era de 15 kg.

e. Juan tardó 4 días en pasar un trabajo para la facultad usando Word. El primer día pasó $\frac{1}{4}$ del total del trabajo; el segundo día, $\frac{1}{3}$ de lo que restaba; el tercer día, $\frac{1}{6}$ de lo que faltaba y el cuarto día, las 30 páginas finales. ¿Cuántas páginas tenía el trabajo?

1/4x + 1/3 . 3/4x + 1/6 . 2/3 . 3/4x + 30 = x → 3/12x + 3/12x + 1/12x + 30 = x →

7/12x + 30 = x → 30 = x − 7/12x → 30 = 5/12x → 30 . 12/5 = x → 30 . 12/5 = x → 72 = x El trabajo tenía 72 páginas.

TracO **112. Reúnanse con dos compañeros y resuelvan el siguiente problema.**

El valor de cada departamento de un edificio es proporcional a su tamaño. Por ejemplo, si la superficie del departamento es $\frac{1}{6}$ de la superficie total del edificio, su valor será $\frac{1}{6}$ del precio total del edificio.

a. Escriban **V** (verdadero) o **F** (falso).

- Los departamentos de los pisos más altos son los más caros. F
- Si se conoce la superficie de cada departamento y el precio total del edificio, se puede saber el valor de cada departamento. V

b. El edifico tiene 3 pisos con dos departamentos iguales en cada uno. El área de cada departamento del segundo piso es igual a $\frac{7}{5}$ del área del departamento del tercer piso, y los del primero tienen 5 m² más que los del tercero. Si el área total del edificio es de 316 m², ¿cuál es el área de cada departamento?

2 . (t + 5 m² + 7/5t + t) = 316 m² → 17/5t + 5 m² = 316 m² : 2 → 17/5t = 158 m² − 5 m² → t = 153 m² . 5/17 → t = 45 m²

Piso 1: 50 m², piso 2: 63 m², piso 3: 45 m².

Integración final

$\mathbb{Q}_0^+$ Números racionales positivos y el cero

113. Traduzcan al lenguaje simbólico y resuelvan.

a. La mitad de la suma entre un quinto y el doble de un número es igual a un décimo.
x = 0

b. El cuadrado del producto entre un cuarto y dos tercios es igual a un tercio de un número.
x = 1/12

c. La diferencia entre la raíz cúbica de un octavo y un séptimo es igual a dos novenos de un número aumentado en un tercio.
x = 3/28

d. La suma entre la cuarta parte de un número y el inverso de 2 es igual al cubo de cinco medios.
x = 121/2

e. La raíz cuadrada de la diferencia entre un número y un tercio es igual al doble de un sexto.
x = 4/9

114. Traduzcan al lenguaje coloquial y luego resuelvan.

a. $\frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{25}}$ x = 3/2

b. $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}x$ x = 32

c. $\left(x - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{2}{3} = 1$ x = 23/10

d. $\frac{x-1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ x = 2

115. Transformen en fracción los números decimales y luego resuelvan aplicando la propiedad distributiva.

a. $1,2\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{5}$ x = 2/3

b. $0,\widehat{9}\left(\frac{3}{2}x - 9\right) = 0,\widehat{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ x = 160/21

c. $\frac{5}{2}(x - 0,4) - 0,8\left(\frac{1}{2} - x\right) = 1$ x = 8/11

116. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $0,6(x - 2) = 2^{-2}\left(x - \frac{8}{5}\right)$ 16/7

b. $\frac{1}{3}\sqrt{x + \frac{5}{9}} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}$ 61/36

c. $\left(\frac{1}{3}\right)^{11} : \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \sqrt[5]{\frac{1}{243}}\,x = \frac{1}{3} - x + \frac{5}{3}$ 5/4

d. $\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^2 + \sqrt{x - \frac{1}{4}} = \frac{11}{4}$ 53/16

$\mathbb{Q}$ Números racionales

117. Escriban V (verdadero) o F (falso).

a. La ecuación $x^2 - \frac{25}{9} = 0$ tiene dos soluciones. V

b. La ecuación $x^4 - \frac{1}{2} = 1$ tiene solución racional. F

c. x = 0,4 es la solución de la ecuación $\sqrt{x} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. F

d. La ecuación $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 16 = 0$ no tiene solución. V

118. Completen la tabla.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	Número
El cuadrado de la suma entre un cuarto y el opuesto de un medio es igual a un octavo de un número.	$[1/4 + (-1/2)]^2 = 1/8x$	1/2
A cargo del alumno.	$\sqrt[3]{1 + \frac{x}{4}} = \frac{1}{2}$	−7/2

119. Resuelvan aplicando la propiedad distributiva.

a. $-\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{9}$ x = ±2/3

b. $\frac{x+4}{8} : 2^{-1} = 0,8$ x = −4/5

c. $\left(\frac{2}{9} + \frac{5}{9}x\right) : \frac{1}{3} - \frac{4}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{18}{5}$ x = 2

120. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{25}{144}} = -\sqrt{\frac{1}{16}}$ x = 7/6

b. $-\frac{3}{8}x + 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 : \frac{1}{8}$ x = 7/3

c. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{6} - \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = -0,\widehat{6}x + \sqrt{\frac{64}{25}}$ x = 2

d. $1 + \frac{2}{5}x^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} : \frac{1}{2^5}$ x = ±5/2

Números racionales positivos y el cero

121. Planteen y resuelvan.

a. El área de un triángulo es igual a $\frac{4}{9}$ cm^2 y su altura es la mitad de su base. ¿Cuánto miden la base y la altura del triángulo?
b = 4/3 cm; h = 2/3 cm.

b. El área de un cuadrado es igual a un noveno del área de otro cuadrado de lado igual a $\frac{3}{2}$ cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?
P = 2 cm.

c. Si a los dos quintos de la edad de Juana se le suma la mitad de la edad de Camila, que tiene 24 años, se obtiene 32. ¿Cuál es la edad de Juana?
50 años.

d. Del total de alumnos de un colegio, un tercio estudia francés y un cuarto del resto, alemán. Si los 105 alumnos restantes estudian inglés, ¿cuántos alumnos hay en el colegio?
210 alumnos.

e. De un depósito de agua se saca un tercio del contenido y luego, dos quintos de lo que quedaba. Si quedan 600 litros, ¿cuántos litros de agua había al principio?
1 500 litros.

f. En un grupo de corredores, dos quintos son varones. Si hay 14 mujeres más que varones, ¿cuántos corredores hay en total?
70 corredores.

g. Ana, Laura y Gabriela le compraron un regalo a su hermano. Ana pagó $\frac{13}{20}$ de lo que pagó Laura y Gabriela pagó $200 más que Ana.
Si el regalo salió $2 500, ¿cuánto pagó cada una?
Laura: $1 000; Ana: $650; Gabriel: $850.

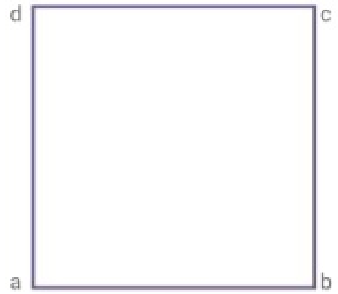
h. Javier está preparando un trago que lleva jugo de tres frutas. La tercera parte lleva jugo de naranja, la cuarta parte del resto lleva jugo de frutilla y los 3 litros restantes, jugo de ananá. ¿Cuántos litros tiene el trago?
6 litros.

Números racionales positivos y el cero

122. Tengan en cuenta los datos y hallen lo pedido de cada figura.

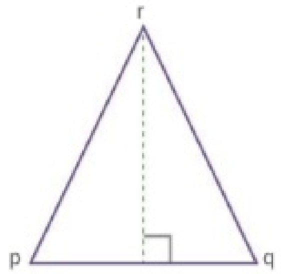
a. Calculen el perímetro del cuadrado abcd.
x = 2/3; P = 16/3 cm.

$\overline{ab} = \frac{1}{2}x + 1$; $\overline{bc} = x + \frac{2}{3}$



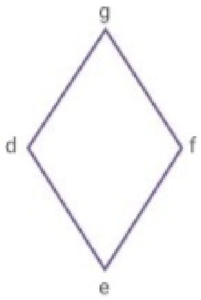
b. Calculen la base y la altura del triángulo pqr.
x = 20/3; b = 5 cm; h = 10/3 cm.

$\overline{pq} = \frac{3}{4}x$; $H = \frac{1}{2}x$; área $= \frac{25}{3}$ cm^2



c. Calculen el perímetro del rombo defg.
x = 8; P = 20 cm.

$\overline{ef} = \frac{1}{4}x + 3$; $\overline{dg} = \frac{3}{8}x + 2$



4 Funciones

27. Representaciones en el plano

▶ SABERES DINÁMICOS

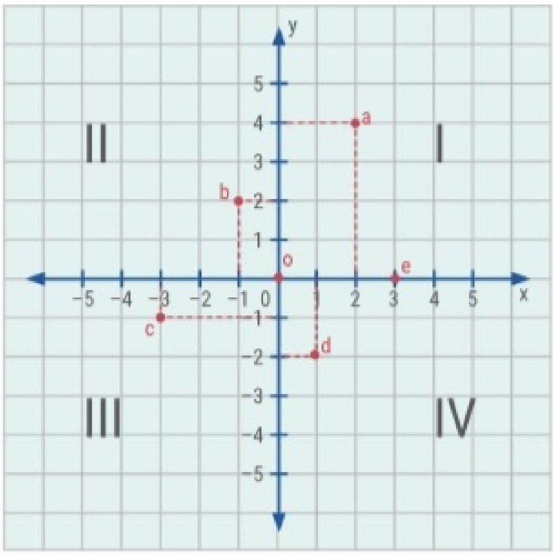
Representación de puntos en el plano

Para **ubicar puntos en el plano**, se puede utilizar un sistema de ejes cartesianos.

Los **ejes cartesianos** son dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto denominado origen de coordenadas. La recta horizontal recibe el nombre de eje de las abscisas (eje x), y la recta vertical, eje de las ordenadas (eje y).

Cada punto queda determinado por dos valores que forman un par ordenado, donde el primer valor representa la abscisa y el segundo, la ordenada.

Cuando se traza un sistema de ejes cartesianos, el plano queda dividido en 4 cuadrantes.
El primer cuadrante es aquel donde los puntos tienen abscisa y ordenada positiva.
Los cuadrantes se numeran en sentido antihorario (contrario a las agujas del reloj).



o = (0;0) ← Origen de coordenadas.

a = (2;4)

b = (−1;2)

c = (−3;−1)

d = (1;−2)

e = (3;0)

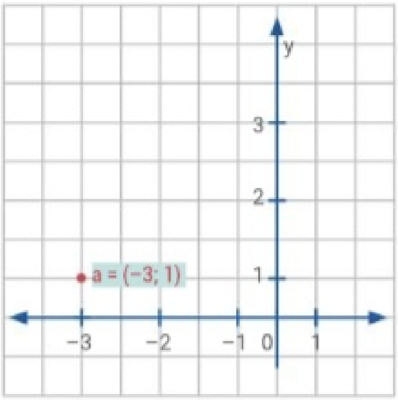
"a" pertenece al primer cuadrante (I).

"b" pertenece al segundo cuadrante (II).

"c" pertenece al tercer cuadrante (III).

"d" pertenece al cuarto cuadrante (IV).

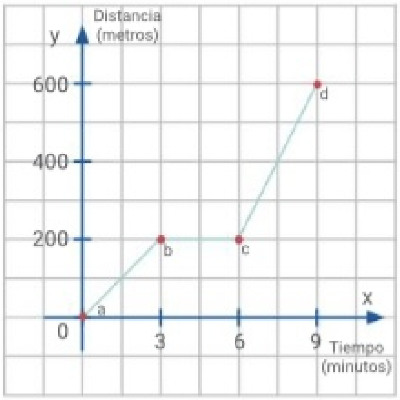
El par ordenado que determina al punto "a" tiene abscisa −3 y ordenada, 1; o sea, a = (−3;1). El punto "a" pertenece al segundo cuadrante. Su representación gráfica es:



27. Representaciones en el plano

Interpretación de gráficos

En algunas situaciones, los gráficos proporcionan información relacionando dos variables.



• ¿Qué información proporciona el gráfico?

El gráfico muestra el recorrido que hace Julia caminando desde su casa hasta la escuela.

• ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cómo están expresadas?

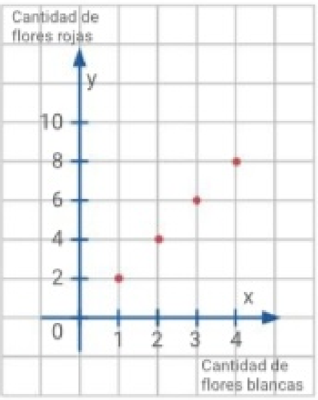
Las variables son: tiempo (variable independiente, expresada en minutos) y distancia (variable dependiente, expresada en metros).

• ¿Cuáles son las variaciones que tiene el gráfico? ¿Qué significado tienen?

Julia sale de su casa hacia la escuela, se detiene en la librería a comprar unos mapas y continua su camino.

Algunos puntos indican la posición de Julia: el punto "a" indica el instante en que salió de su casa; el punto "b", en qué momento llega a la librería y a qué distancia de su casa se encuentra; el punto "c" indica el momento que parte de la librería, y el punto "d" indica el tiempo que tardó en llegar a la escuela y a qué distancia de su casa se encuentra.

El gráfico es de trazo continuo, ya que la variable "tiempo" es continua, es decir, se puede conocer la posición en cualquier instante del recorrido.



En una florería se arman distintos ramos de flores manteniendo una relación entre la cantidad de flores blancas y de flores rojas. Por cada flor blanca se colocan dos rojas.

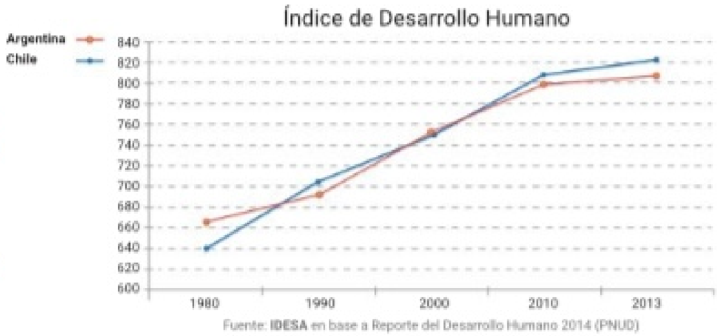
Las variables que se relacionan son: "cantidad de flores blancas" (variable independiente, expresada en unidades) y "cantidad de flores rojas" (variable dependiente, expresada en unidades).

El gráfico es de puntos aislados porque la cantidad de flores es un número natural, es decir, no existe un valor de "x", por ejemplo, que sea mayor que 1 y menor que 2.

Áreas dinámicas [Matemática y Geografía]

¿Cómo se mide el desarrollo humano?

EL IDH es un índice que mide el desarrollo humano. El siguiente gráfico compara la evolución de dicho índice entre los años 1980 y 2013 en la Argentina y en Chile. Pueden encontrar más información en **www.undp.org/content/undp/es/home.html**



TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que el punto a = (0;5) pertenece al eje de abscisas? No, pertenece al eje de las ordenadas.
   b. ¿A qué cuadrante puede pertenecer el punto a = (x;2x)? Si x es positivo, al primer cuadrante. Si es negativo, al tercer cuadrante.

   ApAp c. Tiren un dado 20 veces y registren la cantidad de veces que salió cada cara. Luego, realicen un gráfico que relacione cada cara con el número de veces que salió. Indiquen si el gráfico es de trazo continuo o de puntos aislados.
   A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

27. Representaciones en el plano

1. **Representen los siguientes puntos en un sistema de ejes.**

a = (2;0,5)

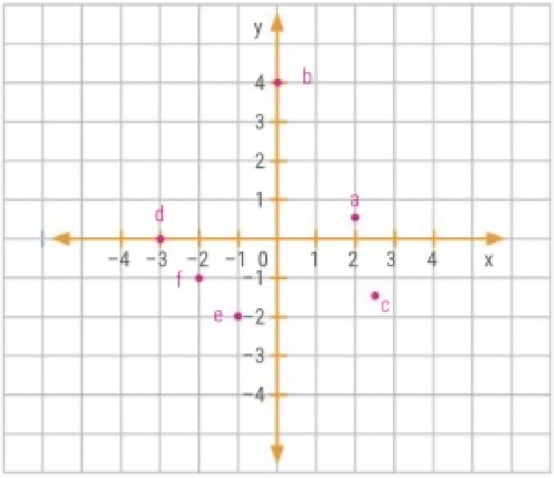
b = (0;4)

c = (2,5;−1,5)

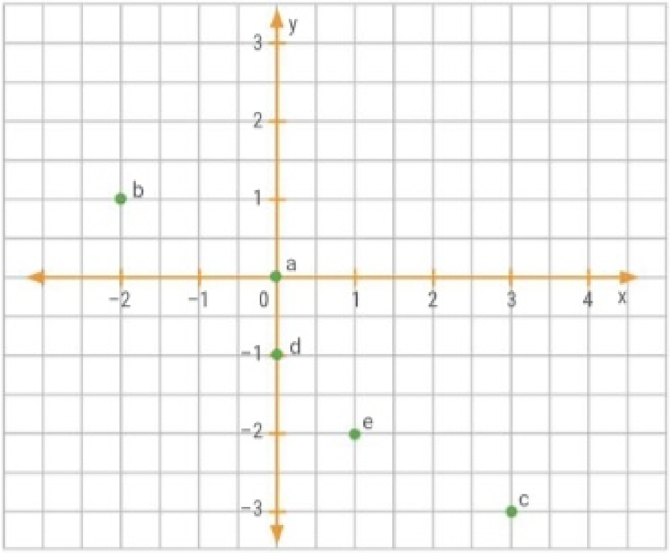
d = (−3;0)

e = (−1;−2)

f = (−2;−1)



2. **Escriban las coordenadas de cada punto.**



a. a = (0 ; 0)

b. b = (−2 ; 1)

c. c = (3 ; −3)

d. d = (0 ; −1)

e. e = (1 ; −2)

Trac0 3. **Reúnanse en grupos, tengan en cuenta las condiciones y escriban las coordenadas de los puntos.**

a. Dos puntos sobre el eje de abscisas cuya distancia al origen de coordenadas sea 4.

(4;0) y (−4;0).

b. Un punto que pertenezca a la bisectriz del tercer cuadrante.

Por ejemplo: (−1;−1), (−2;−2), etc.

c. Un punto cuyas coordenadas sean (a;2a).

Por ejemplo: (2;4), (−2;−4).

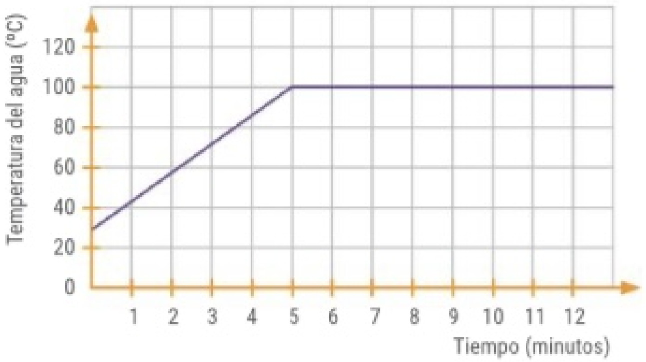
d. Dos puntos que con (3;0) y (3;−2) sean los vértices de un cuadrado.

Puede ser: (1;0) y (1;−2) o (5;0) y (5;−2).

27. Representaciones en el plano

4. Observen la información que presenta el siguiente gráfico y respondan.

Pablo calentó agua en un recipiente.



a. ¿Qué representa el gráfico? La temperatura del agua a medida que pasan los minutos.

b. ¿Qué variables se relacionan? ¿En qué unidad se mide cada una? Las variables son "el tiempo (en minutos)" y "la temperatura (en °C)".

c. ¿Cuál era, aproximadamente, la temperatura inicial del agua? 30 °C.

d. ¿Cuál era, aproximadamente, la temperatura del agua a los 2 minutos? 60 °C.

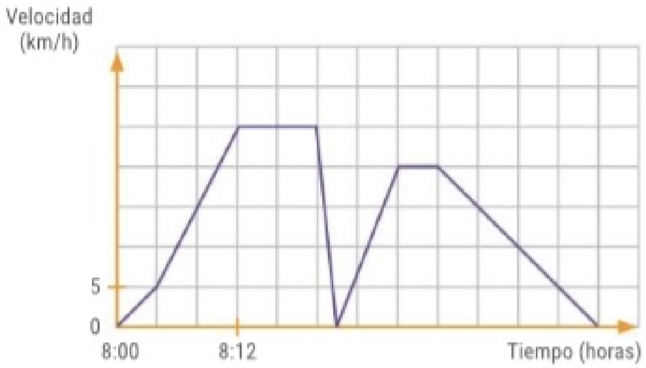
e. ¿En qué momento alcanzó el punto de ebullición? A los 5 minutos.

f. ¿Cuánto tiempo hirvió el agua? 8 minutos.

5. Observen el gráfico y respondan.

María dio un paseo en bicicleta saliendo desde su casa. En determinado momento se cansó y disminuyó la velocidad hasta frenar. Luego, retomó el paseo.

El siguiente gráfico es un registro aproximado de la velocidad de la bicicleta durante el paseo.



a. ¿A qué hora partió desde su casa? A las 8:00 h.

b. ¿Cuánto tiempo tardó en alcanzar la velocidad máxima? ¿Cuál fue esa velocidad? 12 minutos; 25 km/h.

c. ¿A qué hora comenzó a frenar? A las 8:20 h.

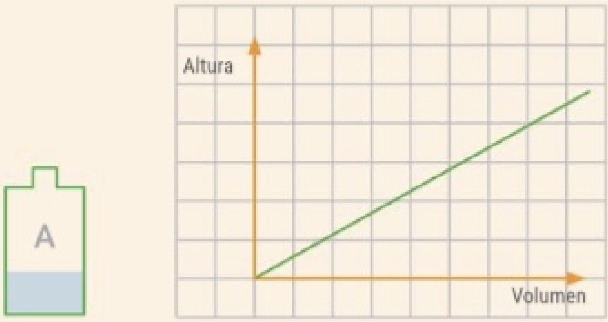
d. ¿En qué momentos mantuvo la velocidad constante? De 8:12 a 8:20 hs y de 8:28 a 8:32 hs.

e. ¿A qué hora finalizó el paseo? A las 8:48 h.

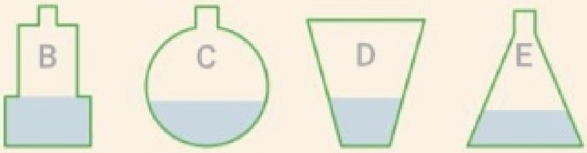
TracO
PenCrit

6. Reúnanse en grupos, observen atentamente y respondan.

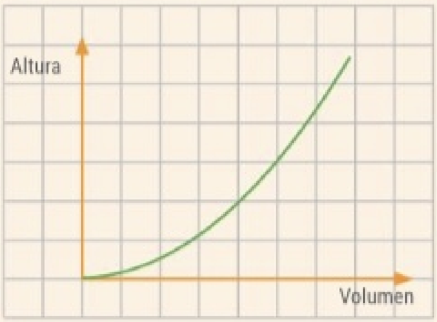
El gráfico representa la altura que alcanza el líquido dentro del envase a medida que se va llenando en forma continua.



Relacionen cada envase con el gráfico más adecuado. Luego, expliquen sus respuestas.

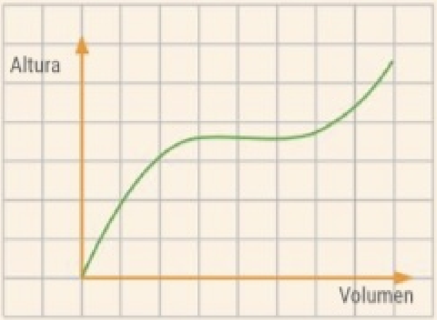


a.



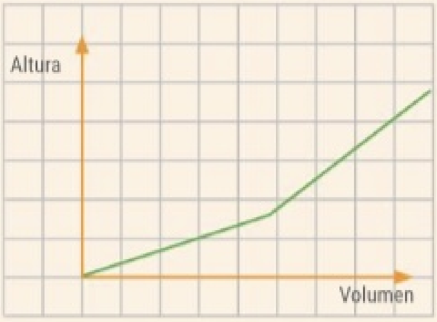
E

c.



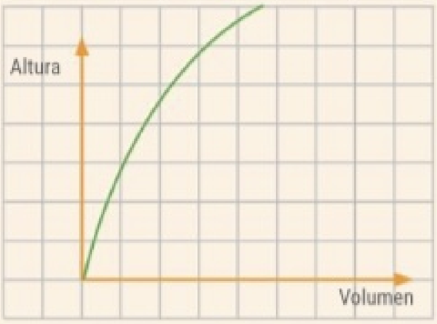
C

b.



B

d.



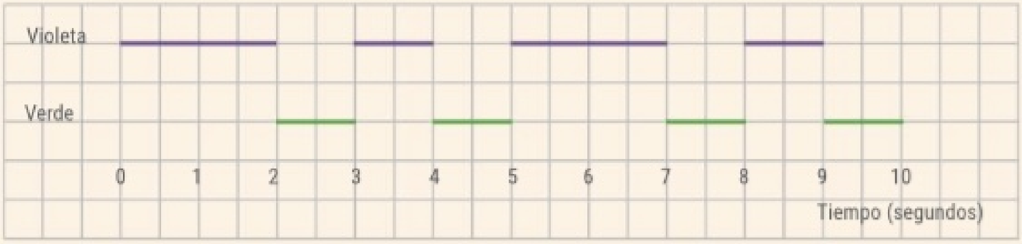
D

27. Representaciones en el plano

TracO

7. Lean, observen el gráfico y resuelvan en grupos.

En un letrero hay luces *leds* de dos colores. El gráfico muestra cuánto tiempo está prendido cada color en una secuencia regular.



a. Se llama período de la secuencia al tiempo que dura un ciclo completo, antes de que comience a repetirse. ¿Cuánto dura el período de esta secuencia? 5 segundos.

b. Copien el gráfico en sus carpetas y continúenlo hasta completar 30 segundos. A cargo del alumno.

c. ¿Durante cuántos segundos emite la luz verde a lo largo de 1 minuto? 24 segundos.

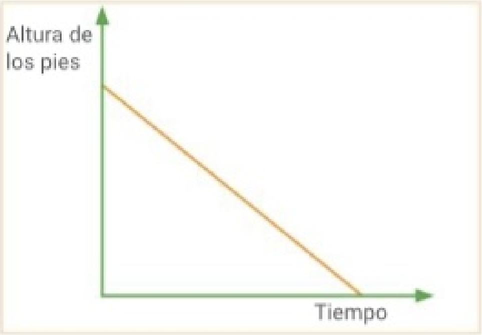
PenCrit

8. Lean atentamente y resuelvan.

Lucía se estaba hamacando, dejó de impulsarse y la hamaca comenzó a detenerse.

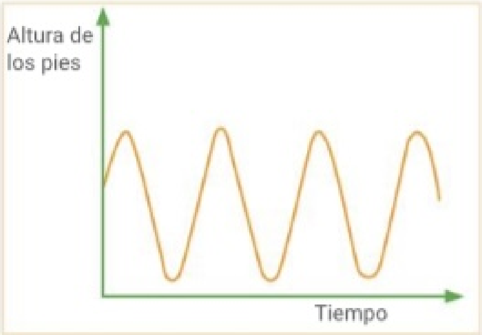
Marquen con una X el gráfico que representa la altura de sus pies, respecto del suelo, mientras la hamaca se va deteniendo.

a.



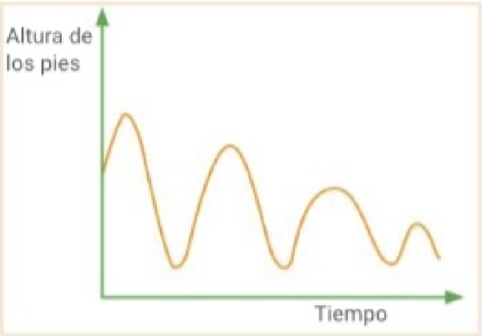
☐

c.



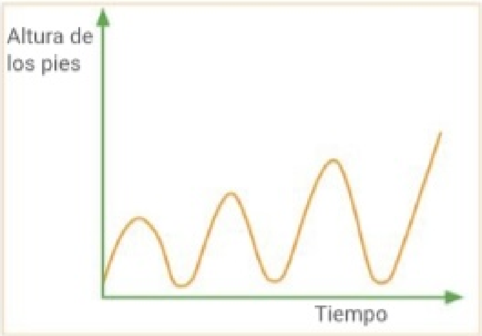
☐

b.



X

d.



☐

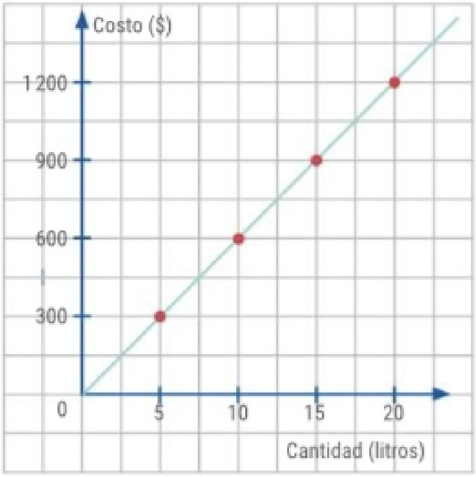
28. Funciones: tablas y gráficos

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función** es una relación entre dos variables en la cual a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.

La siguiente situación corresponde a una función que se representa a través de una tabla y un gráfico.
Una estación de servicio vende nafta a $60 el litro.

Cantidad de nafta cargada (litros)	Costo ($)
5	300
10	600
15	900
20	1 200



Las variables que se relacionan son la cantidad de nafta que se carga (variable independiente) y el costo (variable dependiente).

La relación es función porque para cada valor de la variable "cantidad" corresponde un único valor de la variable "costo".

La relación también se puede expresar a través de una fórmula:

$y = 60 \,.\, x$ x: Cantidad (en litros)   y: Costo (en $)

Así:

Para una carga de 12 litros.
$x = 12$
$y = 60 \,.\, x$
$y = 60 \,.\, 12$
$y = 720$
Hay que pagar $720.

Para una carga de 25 litros.
$x = 25$
$y = 60 \,.\, x$
$y = 60 \,.\, 25$
$y = 1\,500$
Hay que pagar $1 500.

Para un costo de $930.
$y = 930$
$y = 60 \,.\, x$
$930 = 60 \,.\, x$
$930 : 60 = x$
$15{,}5 = x$
La carga fue de 15,5 litros.

Dominio de la función	Imagen de la función
Está formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente.	Está formado por todos los valores que toma la variable dependiente.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿La relación que vincula un número con su doble es una función? Sí.
   b. ¿Es cierto que el punto (−2;3) pertenece a la gráfica de y = −x + 1? Sí. Se verifica: 3 = −(−2) + 1.
   c. En el ejemplo de la estación de servicio, si se quiere llenar un tanque con capacidad máxima de 50 litros, ¿entre qué valores se halla el dominio? ¿Y la imagen?
   Dominio: entre 0 y 50; imagen entre 0 y 3 000.

ApAp

28. Funciones: tablas y gráficos

9. Escriban la fórmula que representa a cada una de las tablas indicadas.

a.

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

$y =$ = 2x

b.

x	y
0	3
1	2
2	1
3	0
4	−1

$y =$ $-x + 3$

c.

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

$y =$ x^2

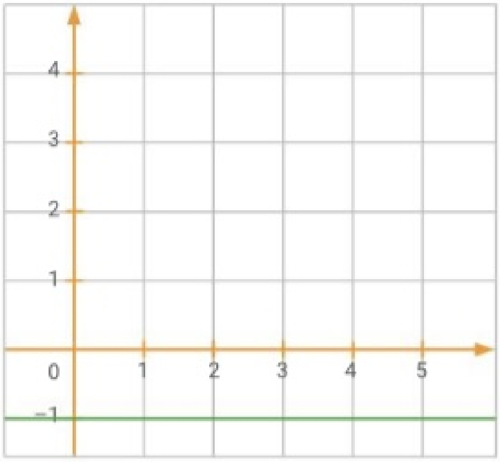
d.

x	y
0	−1
1	−1
2	−1
3	−1
4	−1

$y =$ -1

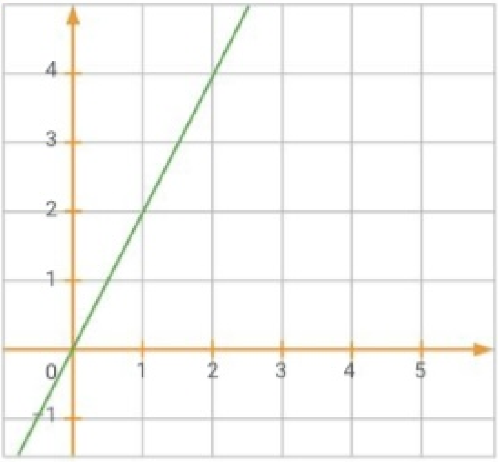
10. Relacionen cada ítem de la actividad anterior con el gráfico correspondiente.

a.



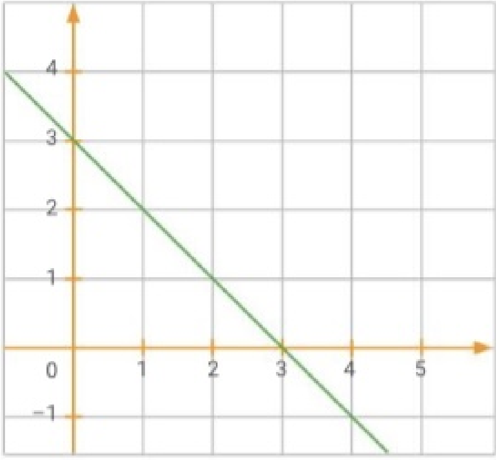
d

c.



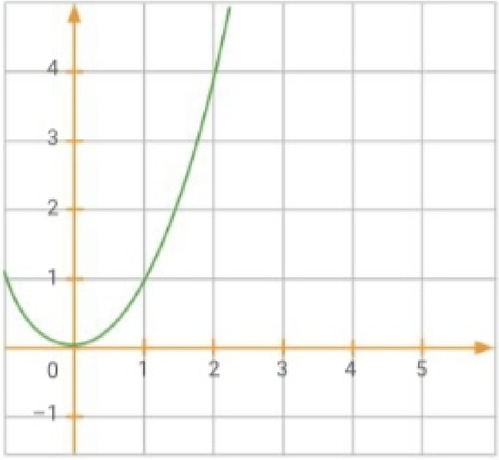
a

b.



b

d.



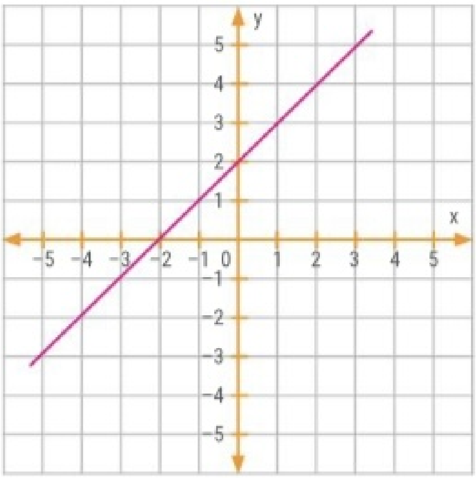
c

28. Funciones: tablas y gráficos

11. Completen cada tabla. Luego, realicen el gráfico correspondiente a cada una.

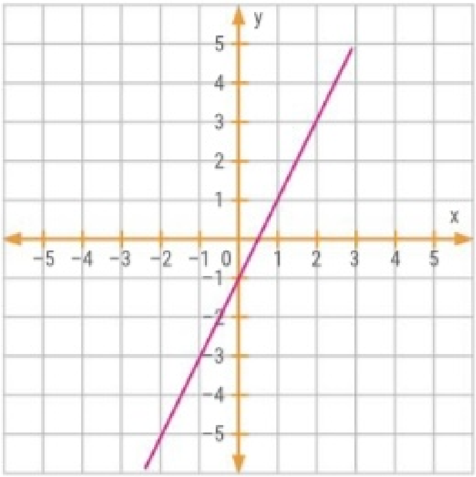
a.

x	$y = x + 2$
−2	0
−1	1
0	2
1	3
2	4



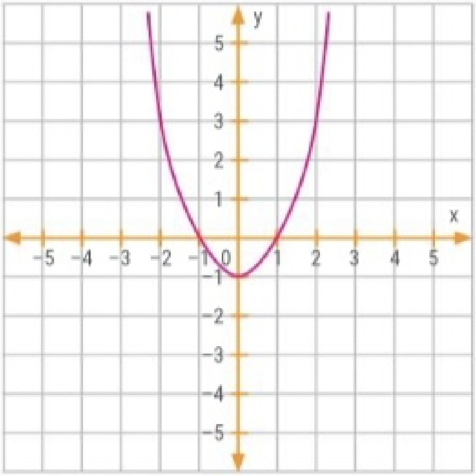
c.

x	$y = 2x - 1$
−2	−5
−1	−3
0	−1
1	1
2	3



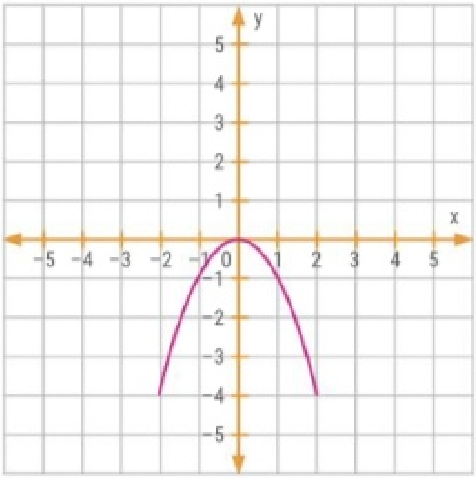
b.

x	$y = x^2 - 1$
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	4



d.

x	$y = -x^2$
−2	−4
−1	−1
0	0
1	−1
2	−4



unciones: tablas y gráficos

ompleten la tabla que relaciona la medida del lado del triángulo equilátero y su perímetro. Luego, van.

L: lado (cm)	5	7,2	12,5	15,4
P: perímetro (cm)	15	21,6	37,5	46,2

diquen si la relación es una función. Sí, es función.

Indiquen una fórmula que permita calcular el perímetro en función del lado.

P = 3 . L

c. Indiquen una fórmula que permita calcular el lado en función del perímetro.

L = P/3

13. Lean atentamente y resuelvan.

Al finalizar la temporada de verano, un club desagotó la pileta de natación para limpiarla. Para vaciarla se utilizó una bomba de achique, que desagota siempre al mismo ritmo. En la siguiente tabla se registró la cantidad de agua que contenía la pileta a medida que se iba vaciando.

Tiempo desde que se encendió la bomba (minutos)	Cantidad de agua en la pileta (litros)
30	291 000
60	282 000
90	273 000
120	264 000

a. ¿Cuántos litros de agua tenía la pileta antes de comenzar a ser desagotada?

300 000 litros.

b. ¿Cuánto litros de agua contenía la pileta luego de una hora y media? 273 000 litros.

c. ¿Cuántos litros por minuto desagota la bomba? (300 000 − 291 000) : 30 = 9 000 : 30 = 300 → 300 litros por minuto.

d. ¿Cuántas horas lleva, aproximadamente, desagotar la pileta? 300 000 : 300 = 1 000 → En 1 000 minutos = 16,67 h.

e. Propongan alguna fórmula que permita calcular el volumen de agua de la pileta en función del tiempo. Verifiquen la fórmula con los datos de la tabla. V = 300 000 − 300 . t

PenCrit **14. Resuelvan.**

Juan realizó una compra por Internet con envío a domicilio. La siguiente función permite calcular el costo total, sabiendo que depende de la distancia por kilómetro recorrido más un cargo fijo por envío a domicilio.

$$C = 25 . x + 50$$

a. ¿Cuál es el costo por kilómetro recorrido? $25

b. ¿Cuál es el valor por envío a domicilio? $50

c. Si la distancia es de 10 km, ¿cuál es el costo total del envío? 25 . 10 + 50 = 300 → El costo es de $300.

d. Si pagó $362,50, ¿cuántos kilómetros recorrió? 25 . x + 50 = 362,50 → 25x = 362,50 − 50 → x = 312,50 : 25 → x = 12,5 → Recorrió 12,5 km.

e. Si en vez de recibirlo en su casa, lo recibe en un domicilio ubicado al doble de distancia, ¿abona el doble?

No, pagará por el doble de los kilómetros, pero el costo fijo se mantiene en $50.

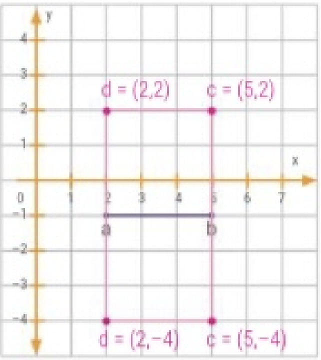
15. **Representen los siguientes puntos en un par de ejes cartesianos.** A cargo del alumno.

a. a = (−1;3) c. c = (4;1,5) e. e = (2;−3)

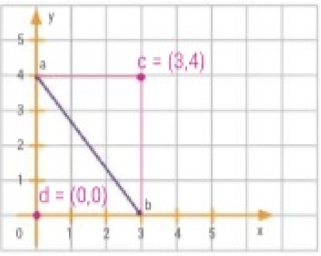
b. b = (0;3) d. d = (−0,5;−2) f. f = (−2;0)

16. **Ubiquen en el par de ejes cartesianos los puntos que cumplan la condición pedida en cada caso. Escriban las coordenadas correspondientes.**

a. Dos puntos "c" y "d" que formen el cuadrado abcd de perímetro = 12 unidades.



b. Un punto "c" que forme un triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{ab}$.



TracO

17. **Reúnanse con un compañero y escriban las posibles coordenadas de los puntos, teniendo en cuenta cada condición. Indiquen a qué cuadrante pertenecen.** Las coordenadas no son únicas.

a. a = (x;y), teniendo en cuenta que: x > 0; y < 0.
(1;−1) 4.° cuadrante.

b. b = (x; y), teniendo en cuenta que: x < 0; y = −2x.
(−3;6) 2.° cuadrante.

c. c = (x;y), teniendo en cuenta que: x + y = 0.
(−2;2) 2.° o 4.° cuadrante.

d. d = (x;y), teniendo en cuenta que: x > 0; y < 0; y = x − 4. ¿Entre qué valores se encuentra x?
(1;−3) 4.° cuadrante. Entre 0 y 4.

e. Puntos "e" y "f" que estén a la misma distancia del punto (−1;0) y del punto (2;0).
(0,5;2) Cualquier par ordenado que esté en la mediatriz. 1.° o 4.° cuadrante.

18. **Grafiquen en un par de ejes cartesianos todos los puntos del plano que se encuentran a dos unidades de distancia del origen de coordenadas. Indiquen qué figura geométrica queda determinada.**
Circunferencia de centro (0;0) y radio = 2

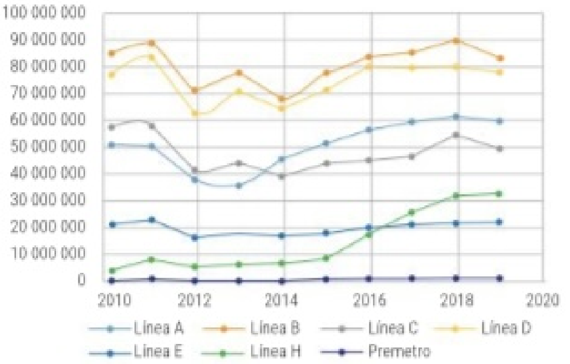
19. **Representen los puntos en un par de ejes cartesianos teniendo en cuenta las condiciones pedidas. Escriban todas las posibles coordenadas de los puntos encontrados.**

a. b = (0;0) y c = (−2;0) y un punto "a", para que abc sea un triángulo rectángulo isósceles.
a = (0;2), a = (0;−2), a = (−2;2) ó a = (−2;−2)

b. g = (1;−1); h = (1;2) y dos puntos "i" y "j", para que ghij sea un cuadrado.
i = (4;2); j = (4;−1) ó i =(−2;2); j = (−2;−1)

20. **Interpreten el gráfico y respondan.**

El siguiente gráfico representa la cantidad de pasajeros transportados por línea de subterráneo y el Premetro entre 2010 y 2019.



Fuente: CNRT (Comisión Nacional de Regulación del Transporte).

a. ¿En qué línea hubo la mayor cantidad de pasajeros transportados en un año? ¿En qué año fue?
La línea B, durante el 2018.

b. ¿Cuál línea tiene la menor variación de pasajeros transportados?
El premetro.

c. ¿Cuántos pasajeros fueron transportados en la línea C durante el año 2014?
40 000 000.

d. ¿Qué línea transporta más pasajeros?
La línea B.

e. ¿En qué años la línea H superó a la línea E en cantidad de pasajeros transportados?
Entre el 2016 y el 2017.

f. ¿En qué años la línea A y la línea C transportaron aproximadamente la misma cantidad de pasajeros?
A mediados del 2013 aproximadamente.

g. Analicen entre todos si es correcto que estén unidos los puntos del gráfico.
Entre el 2011 y el 2012.

TracO

21. **Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.**

Para llenar un tanque que tiene 20 000 litros de capacidad, se abre una exclusa que arroja 4 000 litros de agua por hora.

a. Completen la tabla.

Tiempo "t" (horas)	Cantidad de agua en el tanque "c" (litros)
0	0
1	4 000
2	8 000
3	12 000
4	16 000
5	20 000

b. La relación ¿es una función?
Sí.

c. Si la exclusa permanece todo el tiempo abierta, ¿en cuánto tiempo se llena el tanque?
En 5 h.

d. ¿Cuál es la variable independiente?
Tiempo (en horas).

e. ¿Cuál es la variable dependiente?
Cantidad de agua (en litros)

f. Indiquen el dominio y la imagen.
Dominio = [0;5]; imagen = [0;20 000]

g. Realicen el gráfico en un sistema de ejes.
A cargo del alumno.

h. Escriban una fórmula que represente la situación.
C = 4 000 T

i. Realicen otro gráfico para una situación en la que se haya cerrado la exclusa a la 1:30 por 30 minutos.
A cargo del alumno.

22. **Lean atentamente y resuelvan.**

Estas son las tarifas del transporte público en AMBA.

Tramo (km)	Tarifa
0 a 3	$18
3 a 6	$20
6 a 12	$21
12 a 27	$22
más de 27	$23

Fuente: https://www.argentina.gob.ar/redsube/tarifas-de-transporte-publico-amba-2020

a. ¿Cuánto debe pagar un pasajero que recorre 7 km?
$21

b. ¿Cuántos kilómetros viaja un pasajero que paga $22?
Entre 12 y 27 km.

c. Grafiquen la situación en un sistema de ejes cartesianos. ¿Es un gráfico de trazo continuo? ¿Por qué?
No es un gráfico de trazo continuo ya que solo lo es en intervalos.

d. Investiguen el cuadro de tarifas para los trenes del ramal Mitre, Sarmiento y San Martín. Realicen la tabla y el gráfico correspondiente.
A cargo del alumno.

23. **Reúnanse en grupos, observen el gráfico y respondan.** TracO

Fuente: Observatorio de Industrias Creativas.

a. ¿Qué representa el gráfico?
Inversión publicitaria en radio.

b. ¿Cuáles son las variables?
Tiempo en años e Inversión en miles de pesos

c. ¿Qué período abarca el registro?
1998-2015.

d. ¿En qué años disminuye la inversión publicitaria?
1998-1999; 2001-2002; 2012-2013.

e. ¿En qué años crece la inversión publicitaria?
1999-2000; 2002-2011; 2012-2015.

f. Indiquen en qué año se produjo la menor inversión y cuál fue el importe. Recuerden que el importe está expresado en millones de pesos.
En 2002 con aproximadamente $100 000 000.

g. Indiquen en qué año se produjo la mayor inversión y cuál fue el importe?
En 2015 con $1 600 000 000.

h. ¿En qué período creció más rápidamente la inversión?
2012-2015

i. ¿Cuál fue el incremento de la inversión durante el período graficado?
$1 400 000 000

29. Función lineal

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función** es **lineal** cuando su fórmula es:

$y = ax + b$ — a es un número que representa la pendiente.
b es un número que representa la ordenada al origen.

Las siguientes funciones son lineales.

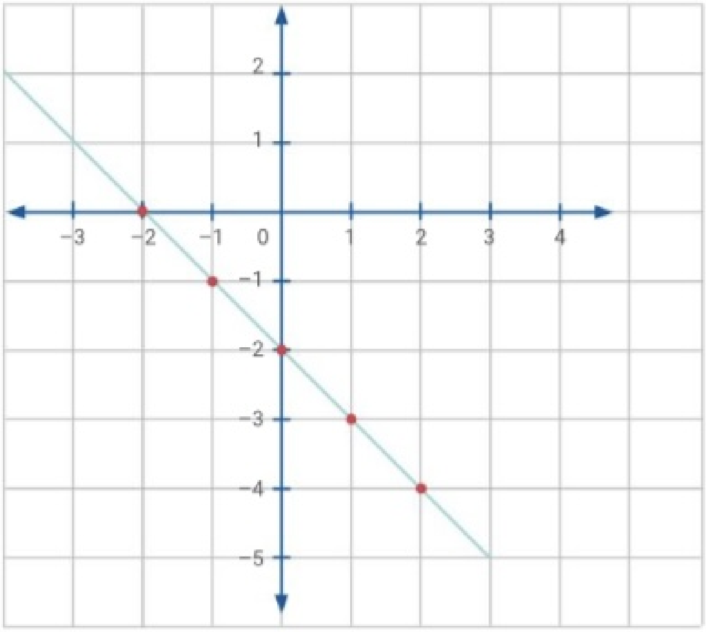
$y = 2x - 1$	$y = 4x$	$y = 5 - x$
$a = 2$	$a = 4$	$a = -1$
$b = -1$	$b = 0$	$b = 5$

Para **representar una función lineal** en un par de ejes cartesianos, se pueden seguir estos pasos.

- Se arma una tabla de valores. Se eligen algunos valores de la variable independiente "x" (dos como mínimo) para determinar la recta.
- Se reemplaza cada valor de "x" en la fórmula para obtener el valor de la variable dependiente "y".
- Se representan los valores de "x" e "y" en un par de ejes cartesianos.

Para representar la función $y = -x - 2$
se puede tener en cuenta que $y = f(x)$
Entonces, se puede escribir: $f(x) = -x - 2$

x	$f(x) = -x - 2$
−2	$-(-2) - 2 = 0$
−1	$-(-1) - 2 = -1$
0	$0 - 2 = -2$
1	$-1 - 2 = -3$
2	$-2 - 2 = -4$



La representación gráfica de una función lineal da como resultado una recta.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuál es la ordenada al origen en la función $y = 3x$? (0;0)
   b. La gráfica correspondiente a la función $y = x^2 - 1$ ¿es una recta? No. Es una función cuadrática.
   c. Escriban la fórmula de una función lineal cuya pendiente es 3 y su ordenada al origen, 2. $y = 3x + 2$

ApAp

ACTIVIDADES

29. Función lineal

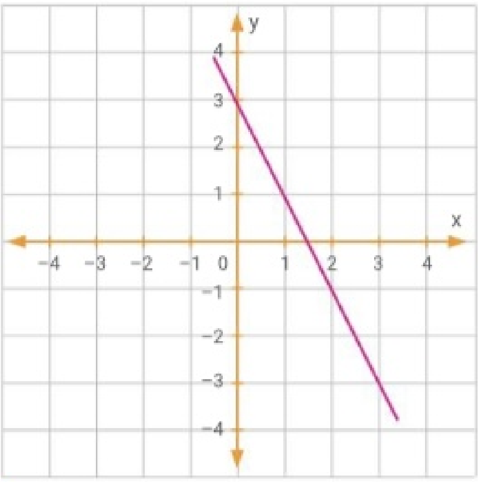
24. Para cada función, completen la tabla de valores. Indiquen el valor de la pendiente "a" y de la ordenada al origen "b". Luego, grafíquenla en los ejes cartesianos.

a.

x	$y = -2x + 3$
0	3
1,5	0

a = −2

b = 3

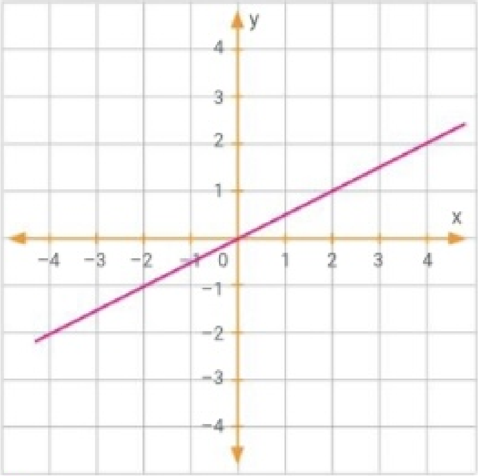


c.

x	$y = \frac{1}{2}x$
−2	−1
4	2

a = 1/2

b = 0

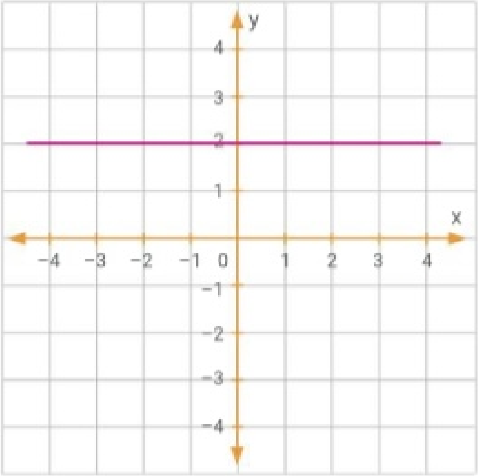


b.

x	$y = 2$
−1	2
1	2

a = 0

b = 2

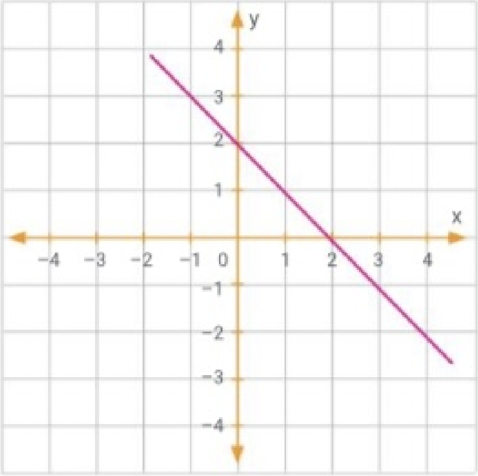


d.

x	$y = 2 - x$
−1	3
0	2

a = −1

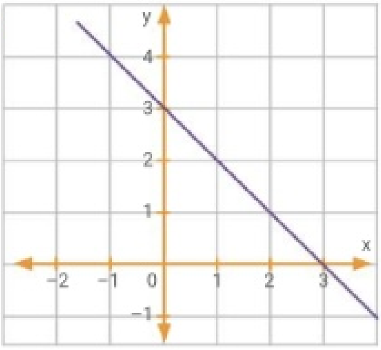
b = 2



29. Función lineal

25. **Observen atentamente cada gráfico. Hallen la pendiente "a" y la ordenada al origen "b". Luego, escriban la fórmula correspondiente en cada caso.**

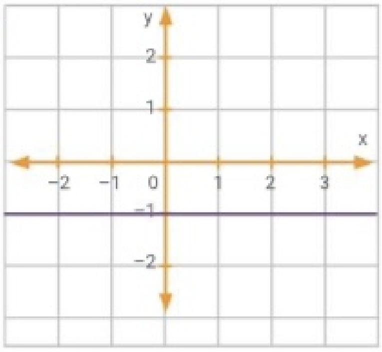
a.



a = −1 b = 3

y = −x + 3

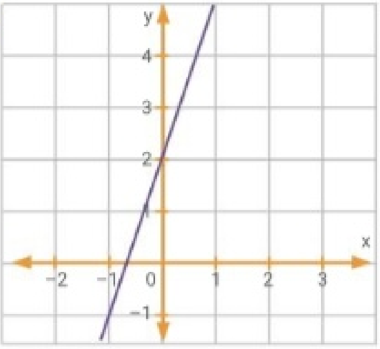
c.



a = 0 b = −1

y = −1

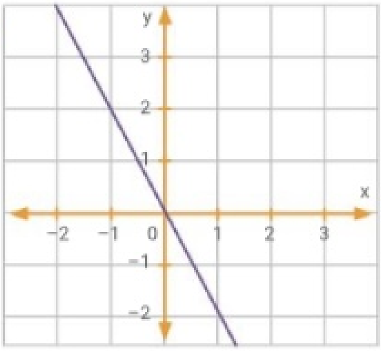
b.



a = 3 b = 2

y = 3x + 2

d.



a = −2 b = 0

y = −2x

26. **Observen el valor de la pendiente "a" y los gráficos de la actividad anterior, luego completen con >, < o = según corresponda. Tachen lo que no corresponda para cada recta.**

a. a [<] 0 La pendiente es ~~creciente~~/*decreciente*/~~constante~~.

b. a [>] 0 La pendiente es *creciente*/~~decreciente~~/~~constante~~.

c. a [=] 0 La pendiente es ~~creciente~~/~~decreciente~~/*constante*.

d. a [<] 0 La pendiente es ~~creciente~~/*decreciente*/~~constante~~.

27. **Indiquen, sin graficar, si las siguientes rectas son: "creciente", "decreciente" o "constante". Expliquen la respuesta.**

a. y = 25 −10x decreciente

El coeficiente de x es negativo.

b. y = 3,5x − 2 creciente

El coeficiente de x es positivo.

c. y = 0,5 constante

y = 0,5 para todo valor de x.

d. y + x = 1 decreciente

El coeficiente de x es negativo (y = −x + 1).

29. Función lineal

TracO

28. Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.

En un laboratorio, se llena un recipiente con una determinada sustancia para un experimento. El peso total del recipiente, a medida que se va llenando, varía según la siguiente fórmula.

$P = 2 + 0{,}79 \cdot C$ P: peso en kg C: cantidad de sustancia en litros

a. ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen? ¿Qué representa en este problema?

Ordenada al origen: 2. Representa el peso del envase vacío.

b. ¿Cuál es el valor de la pendiente? ¿Qué representa en este problema?

Pendiente: 0,79. Representa el peso por litro de la sustancia.

c. Si el recipiente tiene una capacidad de 5 litros, ¿cuál es el peso del recipiente lleno?

$2 + 0{,}79 \cdot 5 = 2 + 3{,}95 = 5{,}95$. El peso del recipiente lleno es de 5,95 kg.

d. Se sabe que el peso por litro es único para cada sustancia. Consulten la siguiente tabla de densidad e investiguen qué sustancia contiene la fórmula.

Líquido (litros)	Densidad (kg/l)
Gasolina	0,68
Alcohol etílico	0,78
Acetona	0,79
Petróleo	0,8
Etanol	0,81
Agua destilada	1

Sustancia que contiene la fórmula: Acetona.

e. ¿Cómo varía la fórmula si se llena con gasolina?

$P = 2 + 0{,}68 \cdot C$ Varía en la pendiente.

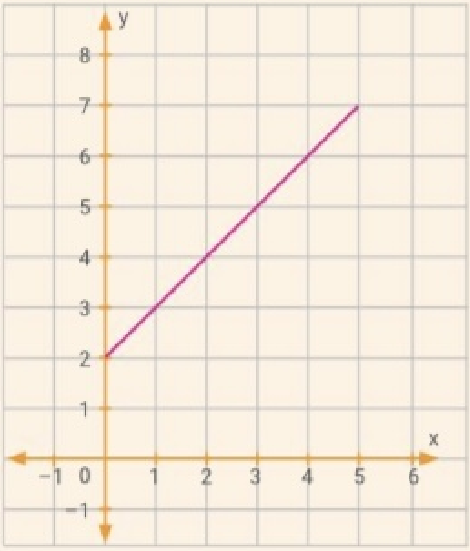
f. Si se llena el recipiente con etanol, ¿cuál es el peso total?

$2 + 0{,}81 \cdot 5 = 2 + 4{,}05 = 6{,}05$. El peso del recipiente lleno es de 6,05 kg.

g. Grafiquen en el par de ejes la función del peso total del envase, si se llena con agua destilada. Indiquen el dominio y la imagen de la función.

Dominio: [0;5]

Imagen: [2;7]



h. Compartan las respuestas del ítem anterior con el resto de los compañeros y analicen cuáles son correctas y por qué.
A cargo de los alumnos.

29. Función lineal

TracO

28. Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.

En un laboratorio, se llena un recipiente con una determinada sustancia para un experimento. El peso total del recipiente, a medida que se va llenando, varía según la siguiente fórmula.

$P = 2 + 0{,}79 \cdot C$ P: peso en kg C: cantidad de sustancia en litros

a. ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen? ¿Qué representa en este problema?

Ordenada al origen: 2. Representa el peso del envase vacío.

b. ¿Cuál es el valor de la pendiente? ¿Qué representa en este problema?

Pendiente: 0,79. Representa el peso por litro de la sustancia.

c. Si el recipiente tiene una capacidad de 5 litros, ¿cuál es el peso del recipiente lleno?

$2 + 0{,}79 \cdot 5 = 2 + 3{,}95 = 5{,}95$. El peso del recipiente lleno es de 5,95 kg.

d. Se sabe que el peso por litro es único para cada sustancia. Consulten la siguiente tabla de densidad e investiguen qué sustancia contiene la fórmula.

Líquido (litros)	Densidad (kg/l)
Gasolina	0,68
Alcohol etílico	0,78
Acetona	0,79
Petróleo	0,8
Etanol	0,81
Agua destilada	1

Sustancia que contiene la fórmula: Acetona.

e. ¿Cómo varía la fórmula si se llena con gasolina?

$P = 2 + 0{,}68 \cdot C$ Varía en la pendiente.

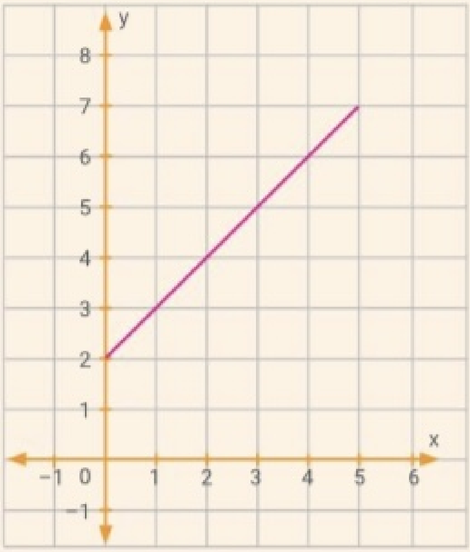
f. Si se llena el recipiente con etanol, ¿cuál es el peso total?

$2 + 0{,}81 \cdot 5 = 2 + 4{,}05 = 6{,}05$. El peso del recipiente lleno es de 6,05 kg.

g. Grafiquen en el par de ejes la función del peso total del envase, si se llena con agua destilada. Indiquen el dominio y la imagen de la función.

Dominio: [0;5]

Imagen: [2;7]



h. Compartan las respuestas del ítem anterior con el resto de los compañeros y analicen cuáles son correctas y por qué.
A cargo de los alumnos.

30. Función de proporcionalidad directa

▶ SABERES DINÁMICOS

Dos variables son **directamente proporcionales** cuando el cociente entre las cantidades que se corresponden es constante. El número que se obtiene al dividir las cantidades se denomina **constante de proporcionalidad** (k).

Una sustancia se calienta a temperatura constante.

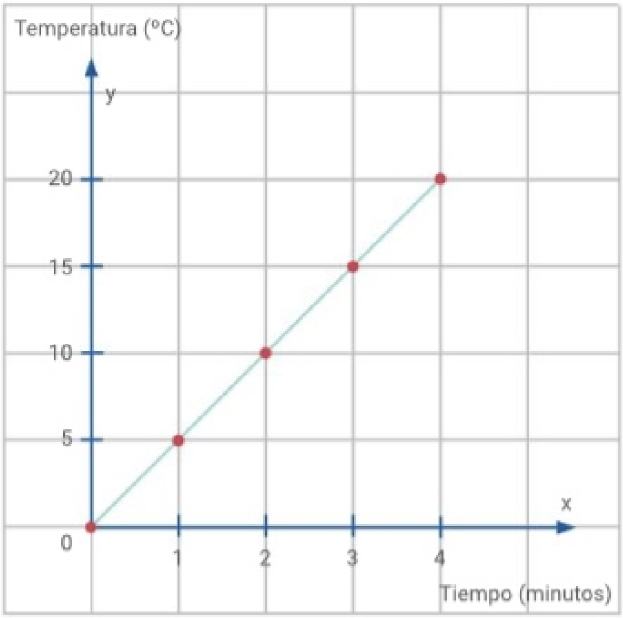
x: tiempo (minutos)	y: temperatura (°C)
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20

→ 5 : 1 = 5
→ 10 : 2 = 5
→ 15 : 3 = 5
→ 20 : 4 = 5

y : x = 5
y = 5 . x
Fórmula de la función

TIP

En el ejemplo, la imagen de 2 es 10.



La representación gráfica de cantidades directamente proporcionales da como resultado un conjunto de puntos alineados sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Áreas dinámicas [Matemática y Físico-Química]

Un ejemplo de una relación directamente proporcional es la ley de Charles y Gay-Lussac, que establece que "la presión de un gas es directamente proporcional a su temperatura cuando el volumen es constante". Significa que si se aumenta al doble la temperatura de un recipiente que contiene un gas y que no puede modificar su tamaño, la presión del gas aumenta al doble también.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fpd * para observar cómo varía la representación de una función de proporcionalidad directa al cambiar su fórmula.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/G2FGP2QU

c.

x	y = 2x
0	0
1	2
2	4
3	6

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad directa en cada una de las siguientes funciones?
   f(x) = −3x   g(x) = 0,5 x   h(x) = x   i(x) = 4x   −3; 0,5; 1; 4, respectivamente.
   b. La función y − 2x = 0, ¿es una función de proporcionalidad directa? Sí (y = 2x).
   ApAp c. Escriban la fórmula de una función de proporcionalidad directa, sabiendo que el punto a = (2;4) pertenece a la función. Confeccionen una tabla con los valores de "x" e "y" de cuatro puntos de esa función.

ACTIVIDADES

30. Función de proporcionalidad directa

29. Marquen con una X las tablas en las que existe una relación de proporcionalidad directa. En esos casos, escriban la constante de proporcionalidad y la fórmula de la función.

a. [ ]

x	y
0	1
3	9
4	12
5	15

No es de proporcionalidad directa.

k =

f(x) =

b. [X]

x	y
2	6
3	9
4	12
5	15

k = 3

f(x) = 3x

c. [X]

x	y
−3	1,5
−2	1
1	−0,5
4	−2

k = −0,5

f(x) = −0,5x

30. Completen la tabla de proporcionalidad directa. Hallen la constante de proporcionalidad y escriban la fórmula de la función.

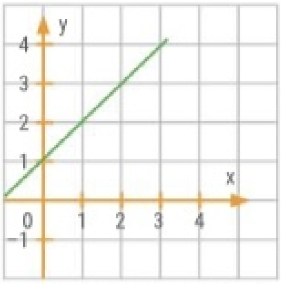
x	1	2	3	4	5
y	2,5	5	7,5	10	12,5

k = 2,5

f(x) = 2,5x

31. Marquen con una X los gráficos que corresponden a una función de proporcionalidad directa. Escriban en los casos que corresponda la constante de proporcionalidad y la fórmula de la función.

a. [ ]

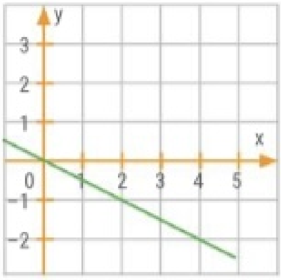


No es de proporcionalidad directa.

k =

f(x) =

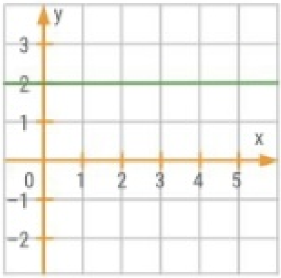
b. [X]



k = −0,5

f(x) = −0,5x

c. [ ]



No es de proporcionalidad directa.

k =

f(x) =

DinámicaMente

Para preparar una solución salina se mezclan dos vasos de agua y cinco cucharaditas de sal.

a. Si se agrega un vaso de agua y una cucharadita de sal, ¿se obtiene una solución salina igual a la anterior, con mayor concentración o con menor concentración de sal? Menor concentración.

b. Si se quiere preparar una solución salina con la misma proporción, pero con cinco vasos de agua, ¿cuántas cucharaditas de sal debe contener? 12,5 cucharitas de sal.

c. Encuentren la constante de proporcionalidad e interpreten su significado en el contexto del problema.
k = 2,5. Significa que por cada vaso de agua se agregan 2,5 cucharitas de sal.

31. Función de proporcionalidad inversa

▶ SABERES DINÁMICOS

Dos variables son **inversamente proporcionales** cuando el producto entre los valores que se corresponden es constante. El número que se obtiene al multiplicar las cantidades se denomina **constante de proporcionalidad** (k).

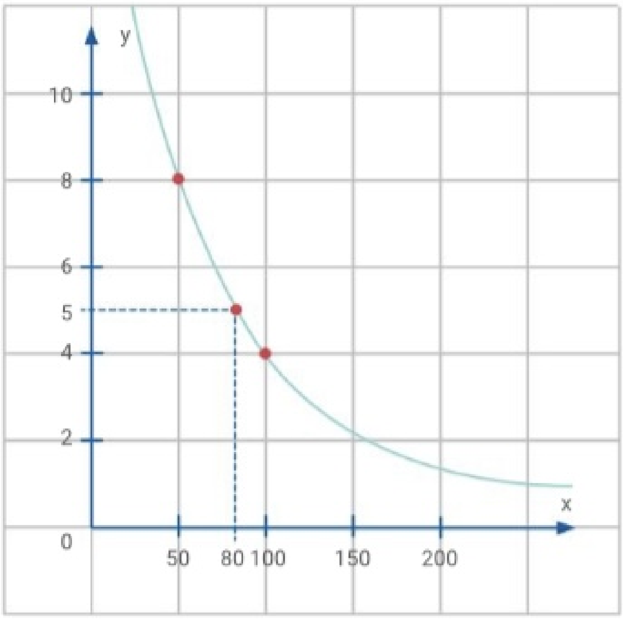
La velocidad de un vehículo es inversamente proporcional al tiempo que tarda en recorrer una determinada distancia.

x: velocidad (km/h)	y: tiempo (minutos)	
100	4	→ 100 . 4 = **400**
50	8	→ 50 . 8 = **400**
80	5	→ 80 . 5 = **400**

x . y = 400

$y = \frac{400}{x}$

Fórmula de la función



La representación gráfica de cantidades inversamente proporcionales da como resultado una curva llamada hipérbola equilátera.

Áreas dinámicas [Matemática y Físico-Química]

Un ejemplo de una relación inversamente proporcional es la ley de Boyle-Mariotte, que establece que "la presión de un gas en un recipiente cerrado es inversamente proporcional al volumen del recipiente, cuando la temperatura es constante". Significa que si aumenta al doble el volumen de un recipiente cerrado que contiene gas y la temperatura se mantiene constante, la presión del gas se reduce a la mitad.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fpi * para observar cómo varía la representación de una función de proporcionalidad inversa al cambiar su fórmula.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/A4hKfkUu

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. En una función de proporcionalidad inversa, si se duplica el valor de una de las variables, ¿también se duplica el valor de la otra? No, el valor de la otra es la mitad.
   b. La función y . 4 = x ¿es una función de proporcionalidad inversa? No, es de proporcionalidad directa.

ApAp
   c. Escriban la fórmula de una función de proporcionalidad inversa, sabiendo que el punto a = (3;4) pertenece a la función. Confeccionen una tabla con los valores de "x" e "y" de cuatro puntos de esa función.

c. y = 12/x

x	y = 12/x
1	12
2	6
3	4
4	3

ACTIVIDADES

31. Función de proporcionalidad inversa

32. Marquen con una X las tablas en las que existe una relación de proporcionalidad inversa. En esos casos, escriban la constante de proporcionalidad y la fórmula de la función.

a. [X]

x	y
−3	$-\frac{5}{3}$
$\frac{1}{2}$	10
1	5
5	1

k = 5

f(x) = 5/x

b. [ ]

x	y
2	5
10	1
4	1,5
3	$\frac{10}{3}$

No es de proporcionalidad inversa.

k =

f(x) =

c. [X]

x	y
2	5
10	1
4	2,5
3	$\frac{10}{3}$

k = 10

f(x) = 10/x

33. Completen la tabla con las medidas de la base y la altura de un rectángulo de 36 cm^2 de área.

Base (B)	2	3	6	9	18
Altura (H)	18	12	6	4	2

a. ¿Corresponde a una función de proporcionalidad inversa? Sí.

b. Hallen la constante de proporcionalidad. Indiquen qué representa. k = 36. Representa el valor del área del rectángulo.

c. Escriban una fórmula que calcule la base (B), en función de la altura (H). B = 36/H

34. Lean atentamente y respondan.

Para su cumpleaños, María dispone de un importe fijo para comprar antifaces. Consultó los precios de distintos modelos y registró la cantidad de antifaces que puede comprar con su dinero.

a. Completen la tabla.

P: precio por unidad	C: cantidad de antifaces
80	10
160	5
40	20
20	40

b. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?

k = 800

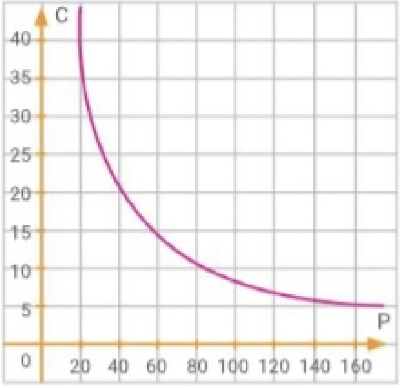
c. ¿Qué representa la constante de proporcionalidad?

Representa la cantidad de dinero que dispone para gastar.

d. Escriban una fórmula que permita calcular la cantidad de antifaces que puede comprar en función del precio unitario.

C = 800/P

e. Grafiquen en el par de ejes cartesianos.



Integración final

35. **Tengan en cuenta la fórmula de cada función lineal e indiquen el valor de la pendiente y de la ordenada al origen. Luego, clasifiquen sin graficar en "creciente", "decreciente" o "constante".**

a. $f(x) = -x - 2$ Pend.: −1; ord.: −2; decreciente.

b. $f(x) = 0{,}5 + 4x$ Pend.: 4; ord.: 0,5; creciente.

c. $f(x) = -3$ Pend.: 0; ord.: −3; constante.

d. $f(x) + 3x = 1$ Pend.: −3; ord.: 1; decreciente.

36. **Escriban la ecuación de la recta que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.**

a. Ordenada al origen: −1; pendiente: $\frac{1}{3}$.
$y = 1/3\,x - 1$

b. Pendiente: 2; contiene al punto b = (0;0).
$y = 2x$

c. Pasa por los puntos (−1;5) y (3;5).
$y = 5$

37. **Grafiquen las rectas de la actividad anterior.**
A cargo del alumno.

38. **Calculen lo pedido en cada caso sabiendo que $f(x) = -2x + 1$.**

a. $f(-2) =$ 5

b. $f(0{,}5) =$ 0

c. El valor de "x" para que $f(x) = 2$. $x = -0{,}5$

39. **Indiquen, sin graficar, cuáles de las siguientes funciones son lineales.**

a. $y = \frac{5}{x} + 1$ No es lineal.

b. $y - 2x = 3$ Es lineal.

c. $y = 3x^2 - 5$ No es lineal.

d. $y = -\frac{1}{2}$ Es lineal (constante).

TracO

40. **Reúnanse con un compañero y resuelvan.**

a. Dibujen en un par de ejes coordenados la recta que pasa por los puntos a = (3; 0) y b = (0;−2).
A cargo del alumno.

b. Indiquen el valor de la pendiente y de la ordenada al origen.
Pendiente: 2/3; ordenada al origen: −2.

c. Escriban la fórmula de la recta.
$y = 2/3x - 2$

41. **Escriban, para cada situación, "directa" o "inversa", cuando sea posible.**

a. El lado de un cuadrado y su perímetro.
directa.

b. La edad de una persona y su altura.
No es proporcional.

c. La distancia que recorre un auto en determinado tiempo yendo a velocidad constante.
directa.

d. El estiramiento de un resorte y la pesa que cuelga del mismo.
directa.

e. La cantidad de máquinas iguales y el tiempo que tardan en empaquetar una determinada producción.
inversa.

42. **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen las respuestas.** PenCrit

a. La gráfica de una función de proporcionalidad inversa es una hipérbola. V

b. Los puntos (4;8) y (2,1) pertenecen a una función de proporcionalidad directa. F

c. La ordenada al origen de una función de proporcionalidad directa nunca es cero. F

d. La constante de proporcionalidad directa se obtiene multiplicando los valores que se corresponden. F

e. La constante de proporcionalidad siempre es mayor que 0. F

43. **Escriban la función de proporcionalidad. Indiquen si es directa o inversa en cada caso.**

a.

x	y
0	0
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3}$
3	1

$y = 1/3x$
Proporcionalidad directa.

b.

x	y
1	$\frac{1}{2}$
2	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$y = 1/2x$
Proporcionalidad directa.

c.

x	y
−0,5	9
3	−1,5
4,5	−1
−3	1,5

$y = -4{,}5/x$
Proporcionalidad inversa.

44. **Resuelvan.**

a. La velocidad de impresión de una impresora es de 30 ppm (páginas por minuto). ¿Cuántas páginas puede imprimir en $\frac{1}{4}$ de hora?
450 páginas.

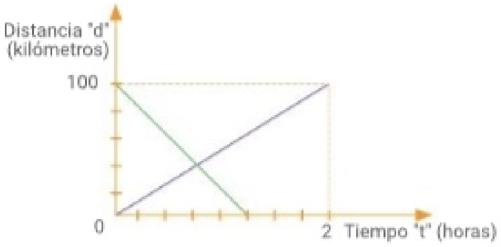
b. Pablo tiene una cantidad de golosinas. Arma paquetes con la misma cantidad de golosinas para repartir entre sus amigos. Si las agrupa de a 5, puede armar 8 paquetes. Si quiere armar 4 paquetes, ¿cuántas golosinas debe poner en cada uno?
10 golosinas.

c. Juan mide sus pulsaciones. Contabiliza 20 pulsaciones en 15 segundos. Calculen el número de pulsaciones por minuto.
80 pulsaciones por minuto.

d. El aumento de peso esperable de un bebé durante las 6 primeras semanas de vida es de 20 gramos por día. 280 g en 14 días.
¿Cuántos gramos es esperable que aumente durante las 2 primeras semanas?
¿Cuántos gramos es esperable que aumente al finalizar las 6 primeras semanas? ¿Y al finalizar la décima? No hay información suficiente.

45. **Lean atentamente y resuelvan.**

Dos autos parten por la misma ruta al mismo tiempo. Pero uno sale desde la ciudad "A" hacia la ciudad "B" y el otro desde la ciudad "B" hacia la ciudad "A". El gráfico representa la distancia a la que se encuentran los dos autos con respecto a la ciudad "A".



a. ¿A qué distancia se encuentran las ciudades?
100 km.

b. Escriban la fórmula correspondiente al recorrido de cada auto. Indiquen la pendiente y la ordenada al origen. Desde B: $d = -80t + 100$; pend.: -80; ord.: 100. Desde A: $d = 50t$; pend.: 50; ord.: 0.

c. ¿Cuál es la velocidad de cada auto? ¿Es constante?
Desde B: 80 km/h. Desde A: 50 km/h.

d. Calculen en qué momento los dos autos coinciden en el mismo lugar.
0,77 h = 46,15 minutos.

e. ¿A qué distancia de cada ciudad se encuentran al momento de cruzarse?
A 38,4 km de la ciudad A y a 61,6 km de la ciudad B.

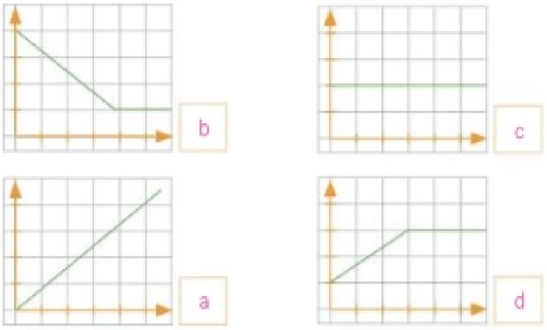
46. **Relacionen cada ítem con el gráfico correspondiente.** PenCrit

a. Un tanque de agua vacío que comienza a llenarse en forma constante.

b. Una sustancia que comienza a enfriarse hasta alcanzar la temperatura ambiente.

c. Una sustancia que se encuentra a temperatura constante.

d. Una sustancia que se pone a hervir unos minutos.



47. **Observen la tabla con las medidas de cada formato de papel.**

Formato	Ancho en mm	Largo en mm
A0	841	1 189
A1	594	841
A2	420	594
A3	297	420
A4	210	297

a. Indiquen si la tabla corresponde a una función de proporcionalidad directa.
Sí.

b. Hallen la constante de proporcionalidad (aproximen a la cifra de los centésimos).
$k = 1{,}41$

c. Escriban la fórmula para calcular el largo en función del ancho.
$L = 1{,}41 \cdot A$

d. Escriban la fórmula para calcular el ancho en función del largo.
$A = L/1{,}41$

e. El formato A5 tiene por largo 210 mm. ¿Cuál es el ancho de este formato?
A = 149 mm

f. El formato A6 tiene por ancho 105 mm. ¿Cuál es el largo de este formato?
L = 148 mm

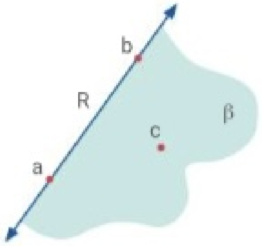
g. Investiguen las dimensiones de la cartulina escolar y verifiquen si cumple la relación.
A cargo del alumno.

5 Rectas y ángulos

32. Elementos fundamentales de la geometría. Circunferencia y círculo

▶ SABERES DINÁMICOS

La geometría se basa en tres elementos fundamentales que no tienen definición: ellos son el **punto**, la **recta** y el **plano**.



- Los **puntos** se pueden nombrar con letras minúsculas de imprenta. Por ejemplo: a, b y c.
- Las **rectas** se pueden nombrar con letras mayúsculas de imprenta. Por ejemplo: R.
- Los **planos** se pueden nombrar con letras del alfabeto griego. Por ejemplo: β.

TIP

Algunas letras griegas

α: alfa	δ: delta	σ: sigma
β: beta	ε: épsilon	φ: fi
γ: gamma	π: pi	ω: omega

Segmento y semirrecta

$\overline{cd}$ se lee: "segmento cd".

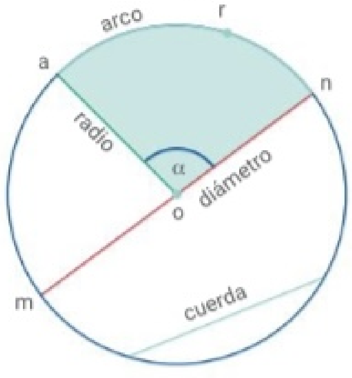
$\overrightarrow{oc}$ se lee: "semirrecta de origen o que contiene al punto c".

Se denomina lugar geométrico al conjunto de puntos que cumplen una propiedad.

Circunferencia y círculo

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de un punto fijo llamado **centro**.

Un **círculo** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia menor o igual de otro llamado centro.



- **Radio**: segmento que tiene por extremos el centro y un punto cualquiera de la circunferencia.
- **Cuerda**: segmento que tiene por extremos dos puntos de la circunferencia.
- **Diámetro**: es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- **Arco**: parte de la circunferencia determinada por dos puntos de la misma. Por ejemplo, $\widehat{arn}$.
- **Ángulo central**: es el que tiene como vértice al centro de la circunferencia. Por ejemplo, $\hat{\alpha}$.
- **Sector circular**: es la región del ángulo central que está incluida en el círculo.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuántas rectas pasan por un punto?
   b. ¿Cuántos puntos son necesarios como mínimo para trazar una única recta?
   c. ¿Es cierto que tres puntos siempre determinan un plano?
   d. Dibujen una circunferencia y tracen la cuerda más grande que se pueda trazar. ¿Qué características tiene?

ApAp

a. Infinitas.
b. Dos puntos.
c. No, los puntos no deben estar alineados.
d. A cargo del alumno.

32. Elementos fundamentales de la geometría. Circunferencia y círculo

1. Tracen y expresen lo pedido en cada caso.

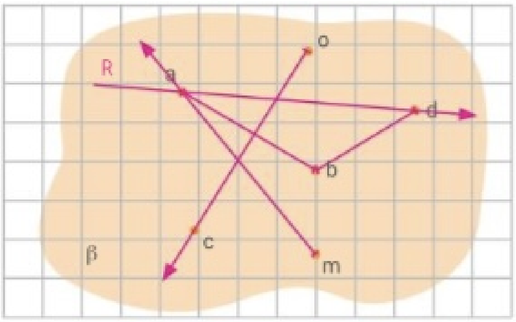
a. El segmento con extremos en los puntos a y b.

b. La semirrecta con origen en o que contiene al punto c.

c. El segmento con extremos en los puntos b y d.

d. La semirrecta con origen en m que contiene al punto a.

e. La recta R que pasa por los puntos a y d.



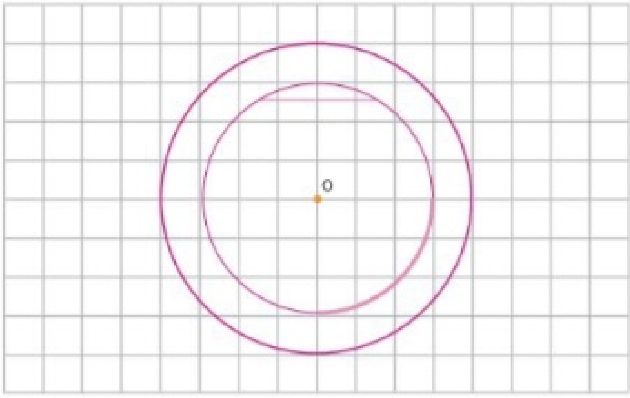
2. Realicen las siguientes construcciones.

a. Una circunferencia de radio 2 cm y centro o.

b. Una cuerda sobre la circunferencia anterior de 1,5 cm.

c. Un arco sobre la circunferencia que corresponda a un ángulo central de 90°.

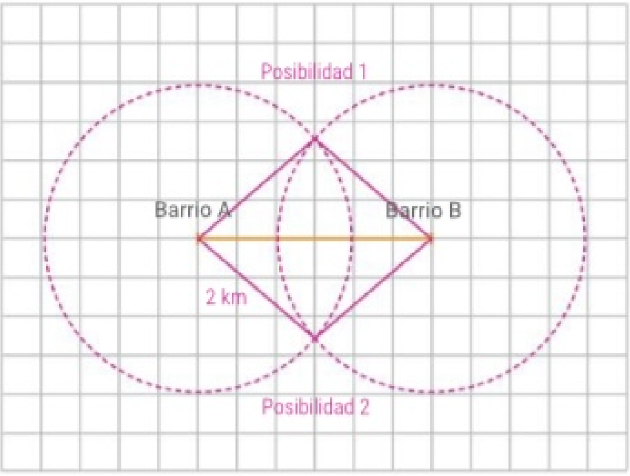
d. Un círculo concéntrico con la circunferencia de 3 cm de diámetro.



3. Lean atentamente y resuelvan.

Dos barrios A y B están ubicados como se muestra en el esquema. El intendente quiere ubicar puestos de salud que estén a 2 km de distancia del barrio A y del barrio B, simultáneamente. ¿Cuántas posibilidades tiene? Consideren que 1 cm en el esquema equivale a 1 km.

Tiene dos posibilidades. Se hace buscando los puntos donde se cortan dos circunferencias de radio 2 cm (2 km reales), una con centro en el barrio A y la otra con centro en el barrio B.



4. Dibujen en la carpeta y respondan. Comparen con sus compañeros la validez de sus respuestas.

Para cada ítem, dibujen un segmento $\overline{mn} = 6$ cm y marquen su punto medio "o".

a. Dibujen dos circunferencias con centros en "m" y en "n", respectivamente, que sean tangentes. ¿Cuánto mide el radio de cada una? El radio de cada una mide 3 cm.

b. Tracen una circunferencia con centro en "m" de 4 cm de diámetro. ¿Cuánto debe medir el radio de otra circunferencia con centro en "n" para que las circunferencias no se toquen? Debe medir menos de 4 cm.

c. Tracen una circunferencia con centro en "o". ¿Cuánto debe medir el radio para que los puntos "m" y "n" sean interiores? Debe ser mayor que 3 cm.

d. Dibujen una circunferencia con centro en "n" y radio 2 cm. ¿Cuánto debe medir el radio de una circunferencia con centro en "m" para que las circunferencias sean secantes? Debe ser mayor que 4 cm.

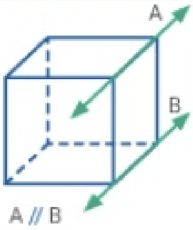
33. Posiciones relativas de dos rectas. Mediatriz

▶ SABERES DINÁMICOS

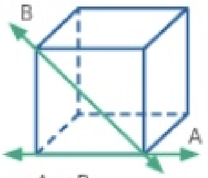
Posiciones relativas de dos rectas

CLASIFICACIÓN DE RECTAS

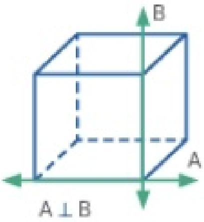
- **COPLANARES**: se encuentran en un mismo plano.
  - **NO SECANTES**: no se intersecan en ningún punto.
    - **PARALELAS**
  - **SECANTES**: se intersecan en un punto.
    - **OBLICUAS**: no forman ángulos rectos.
    - **PERPENDICULARES**: forman cuatro ángulos rectos.
- **ALABEADAS**: no se encuentran en un mismo plano.



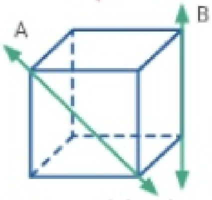
A // B



A ∠ B



A ⊥ B

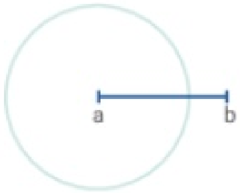


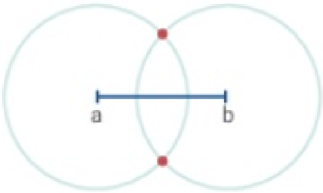
A y B son alabeadas

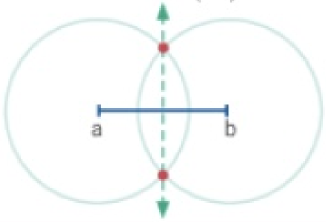
Mediatriz de un segmento

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Todo punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento.

Para trazar la mediatriz (Mz) de un segmento $\overline{ab}$ se pueden seguir los siguientes pasos.







1. Se toma el compás con una abertura aproximadamente mayor que la mitad del segmento y con centro en "a" se traza una circunferencia.	**2.** Con centro en "b" y con un radio igual a la abertura anterior se traza otra circunferencia. Se determinan los puntos donde se cortan ambas circunferencias.	**3.** Se traza la recta que pasa por los puntos de intersección de ambas circunferencias, es decir, la mediatriz.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Cuando dos rectas se encuentran en un mismo plano, ¿siempre se intersecan?
   b. Las rectas paralelas, ¿siempre están en el mismo plano? ¿Son las únicas que no se intersecan?
   c. Las rectas secantes, ¿están siempre en el mismo plano?
   d. Un punto que pertenece a la mediatriz de un segmento ¿puede estar a diferente distancia de cada extremo del segmento?

ApAp

a. No, pueden estar en el mismo plano y no ser secantes.
b. No, pueden existir rectas paralelas alabeadas, es decir, que no estén en el mismo plano.
c. Sí, porque deben cortarse.
d. No, porque si pertenece a la mediatriz del segmento debe estar a la misma distancia de cada extremos del segmento.

ACTIVIDADES

33. Posiciones relativas de dos rectas. Mediatriz

5. **Realicen las siguientes construcciones.**

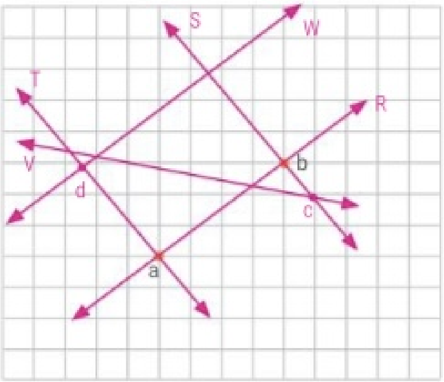
a. Una recta R que pase por los puntos a y b.

b. Una recta T perpendicular a la recta R que pase por "a".

c. Una recta S paralela a la recta T que pase por "b".

d. Una recta V oblicua a la recta R que corte a S en un punto c.

e. Una recta W paralela a la recta R que corte a T en un punto d.



PenCrit 6. **Unan con flechas cada frase con "a veces", "siempre" o "nunca", según corresponda.**

a. Las rectas paralelas se intersecan en un punto.

b. Las rectas oblicuas se cortan formando ángulos no rectos.

c. Las rectas alabeadas están en planos distintos.

d. Las rectas perpendiculares son secantes.

e. Las rectas paralelas pueden ser alabeadas.

f. Las rectas coplanares son paralelas.

• A veces

• Siempre

• Nunca

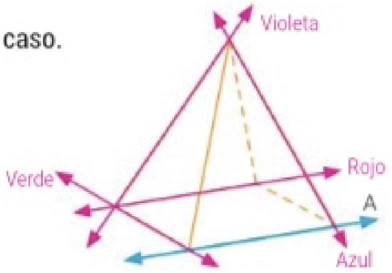
7. **Observen la figura y marquen, si es posible, lo pedido en cada caso.**

a. Con rojo una recta paralela a A.

b. Con verde una recta perpendicular a A.

c. Con azul una recta oblicua a A.

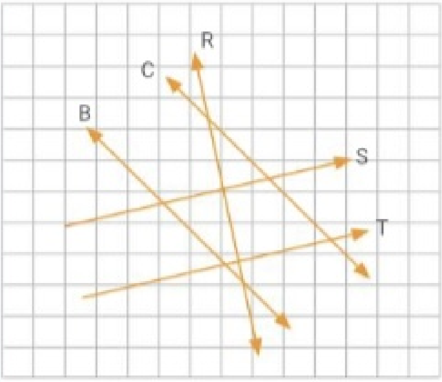
d. Con violeta una recta alabeada a A.



A cargo del alumno.

TracO 8. **Trabajen con un compañero, consideren el aula como el espacio y den ejemplos de dos rectas que cumplan con la clasificación vista en la página 127 de rectas coplanares y alabeadas. Hagan un dibujo en sus carpetas y utilicen la notación matemática para indicar lo observado nombrando las rectas adecuadamente. Luego, compartan las respuestas con el resto de sus compañeros y discutan su validez.**

9. **Observen el gráfico y completen con ∠ (oblicua), ⊥ (perpendicular) o // (paralela).**



a. B // C

b. C ∠ R

c. R ⊥ S

d. S // T

e. T ⊥ R

f. B ∠ S

33. Posiciones relativas de dos rectas. Mediatriz

10. **Observen el mapa de un barrio de Buenos Aires y escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.**

a. Las calles Pinto y Washington son paralelas. V

b. Las avenidas Balbín y Congreso son secantes. V

c. La calle Quesada es perpendicular a la avenida Congreso. F

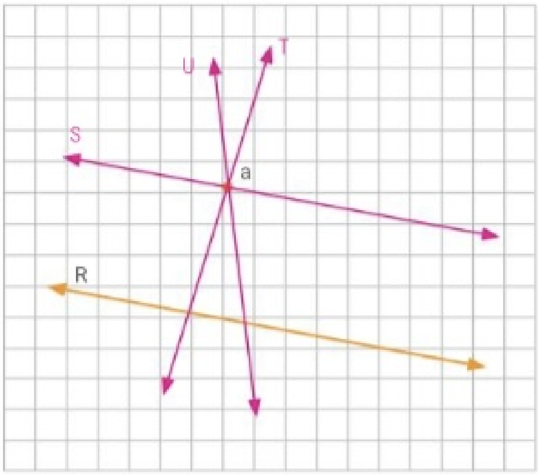
d. Las calles Tamborini y Zapiola son paralelas. F

e. La calle Núñez es oblicua a la avenida Balbín. V

f. Las calles Tamborini y Pedraza son secantes. F

g. Las calles Washington y Núñez son perpendiculares. V

11. **Realicen las construcciones pedidas en cada caso.**



a. Una recta S paralela a la recta R que pase por el punto a.

b. Una recta T perpendicular a la recta S que pase por el punto a.

c. Una recta U oblicua a la recta T que pase por el punto a.

12. **Tengan en cuenta la actividad anterior y completen con ∠ (oblicua), ⊥ (perpendicular) o // (paralela).**

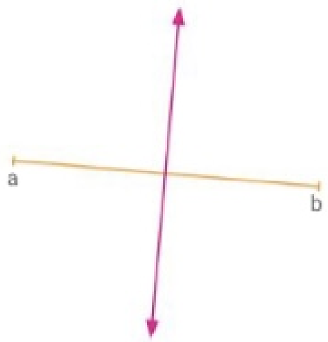
a. R ∠ U

b. T ⊥ R

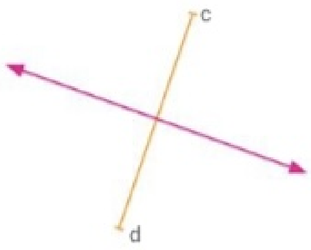
c. U ∠ S

13. **Tracen las mediatrices de los siguientes segmentos.**

a.



b.



33. Posiciones relativas de dos rectas. Mediatriz

PenCrit **14. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen sus respuestas en la carpeta.**

a. Los extremos de un segmento se encuentran a la misma distancia de cualquier punto de la mediatriz. V

b. La mediatriz de un segmento es una recta oblicua que pasa por su punto medio. F

c. El punto medio de un segmento pertenece también a su mediatriz. V

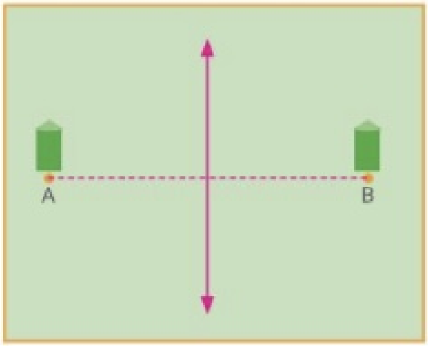
d. Los extremos de un segmento pertenecen también a su mediatriz. F

e. Cualquier par de puntos de un segmento se encuentran a la misma distancia de su mediatriz. F

15. Lean atentamente y resuelvan. Expliquen sus respuestas.

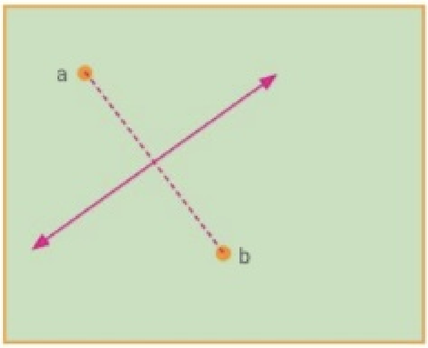
a. En una granja hay dos silos, A y B, donde se almacena el alimento para los animales. Se quiere trazar un camino, de manera tal que la distancia de cualquier punto de este a cada uno de los silos sea la misma. ¿Dónde se tiene que ubicar el camino?

El camino se debe ubicar sobre la mediatriz del segmento que une ambos silos.



b. Los puntos a y b indican las posiciones de dos ciudades: A y B. Se quiere construir un tanque de agua a igual distancia de ambas ciudades. Juan afirma que hay un solo lugar en donde puede ubicarse el tanque, mientras que Ana opina que hay más de una opción. ¿Quién tiene razón? Indiquen en el dibujo las opciones posibles.

Ana tiene razón, porque podría ubicarse sobre cualquier punto perteneciente a la mediatriz del segmento que une a ambas ciudades.



16. Dibujen en la carpeta una recta S y marquen en ella tres puntos: a, b, c, en ese orden. Luego, resuelvan.

a. Tracen las mediatrices de los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$. ¿Cómo son las dos mediatrices entre sí?

Las mediatrices son paralelas.

b. Señalen los puntos medios de los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$, midan el segmento que determinan esos puntos y compárenlo con el segmento $\overline{ac}$. ¿Qué relación encontraron?

El segmento es la mitad del segmento $\overline{ac}$.

DinámicaMente

Dividan el segmento ab en 4 segmentos congruentes. Luego, respondan.

a. Expliquen los pasos que utilizaron para dividir el segmento en 4 segmentos congruentes.

b. ¿Es posible dividirlo en 6 segmentos congruentes utilizando la estrategia anterior? ¿Y en 8?

a ———— b

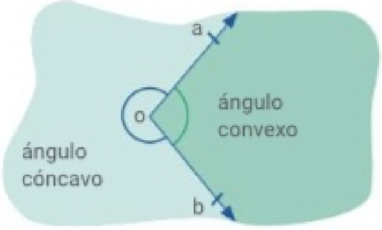
a. Se traza la mediatriz del segmento. Luego se traza la mediatriz de cada uno de esos segmentos que habían quedado determinados.
b. Sí, es posible.

34. Ángulos. Sistema sexagesimal

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **ángulo** es la región del plano determinada por dos semirrectas que tienen el mismo origen.
Para nombrar un ángulo se pueden utilizar las siguientes formas.

- $\widehat{aob}$, se escribe el vértice en el centro y un punto que pertenezca a cada lado;
- $\hat{o}$, se escribe solo el vértice;
- $\hat{\alpha}$, se escribe una letra griega.



El **sistema sexagesimal** se usa para escribir medidas de ángulos.
En este sistema un giro completo se divide en 360 partes iguales; cada una de esas partes se denomina **grado** (°).

Minuto sexagesimal: $1' = \frac{1}{60}$ de 1°   Segundo sexagesimal: $1'' = \frac{1}{60}$ de 1'

Operaciones con los ángulos

Adición de dos ángulos

	42°	18'	37"
+	14°	35'	42"
	56°	53'	79" → (60" + **19"**) → **1'**
		+ **1'**	− 60"
	56°	54'	**19"**

Sustracción de dos ángulos

	44°	
	45° **59' 60"**	**1° = 60'**
−	23° 34' 18"	**1' = 60"**
	21° 25' 42"	

Multiplicación de un ángulo por un número natural

21°	18'	24"
		. 3
63°	54'	72"
	+ 1'	− 60"
63°	55'	12"

División de un ángulo por un número natural

56°	5'	30"	5
− 55°	+		11° 13' 6"
1°	60'		
	65'		
	− 65'	− 30"	
	0'	0"	

Áreas dinámicas [Matemática e Historia]

Los relojes de sol son instrumentos ideados para medir el paso del tiempo a través del movimiento del Sol. Los egipcios fueron los primeros en construirlos y utilizarlos. Su funcionamiento se basa en el movimiento aparente del Sol en un día cualquiera. El Sol sale por el este, pasa por el sur a mediodía (lo que se considera las 12 de la mañana) y se pone por el oeste. Su movimiento, en este período, puede considerarse constante. Luego, desaparece por el oeste y viaja de nuevo hacia el este (mientras tanto para nosotros será de noche). Así recorre 360° en 24 horas, es decir, que recorre 15° sexagesimales cada hora.

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

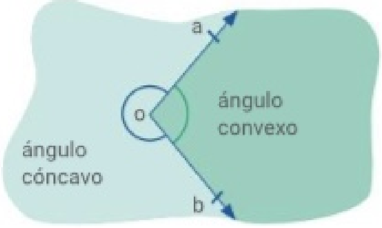
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué tipo de ángulo es el doble de un recto?
   b. ¿Qué tipo de ángulo es y cuánto mide la tercera parte de un ángulo llano?
   c. Indiquén qué cálculo se debe hacer en cada caso.
      - Pasar de grados a minutos.
      - Pasar de minutos a grados.
      - Pasar de minutos a segundos.
      - Pasar de segundos a minutos.
      - Pasar de grados a segundos.
      - Pasar de segundos a grados.

a. Un ángulo llano.
b. Es un ángulo agudo y mide 60°.
c. • Para pasar de grados a minutos multiplicar por 60
• Para pasar de minutos a grados dividir por 60
• Para pasar de minutos a segundos. multiplicar por 60
• Para pasar de segundos a minutos. dividir por 60
• Para pasar de grados a segundos. multiplicar por 3 600
• Para pasar de segundos a grados. dividir por 3 600

34. Ángulos. Sistema sexagesimal

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **ángulo** es la región del plano determinada por dos semirrectas que tienen el mismo origen.
Para nombrar un ángulo se pueden utilizar las siguientes formas.



- $a\hat{o}b$, se escribe el vértice en el centro y un punto que pertenezca a cada lado;
- $\hat{o}$, se escribe solo el vértice;
- $\hat{\alpha}$, se escribe una letra griega.

El **sistema sexagesimal** se usa para escribir medidas de ángulos.
En este sistema un giro completo se divide en 360 partes iguales; cada una de esas partes se denomina **grado** (°).

Minuto sexagesimal: $1' = \frac{1}{60}$ de 1°   Segundo sexagesimal: $1'' = \frac{1}{60}$ de 1′

Operaciones con los ángulos

Adición de dos ángulos

```
   42°  18'  37"
+  14°  35'  42"
   56°  53'  79"  →  (60" + 19")
      + 1'  − 60"          ↓
   56°  54'  19"           1'
```

Sustracción de dos ángulos

```
   44°
   45° 59' 60"     1° = 60'
−  23° 34' 18"     1' = 60"
   21° 25' 42"
```

Multiplicación de un ángulo por un número natural

```
   21°  18'  24"
              . 3
   63°  54'  72"
      + 1' − 60"
   63°  55'  12"
```

División de un ángulo por un número natural

```
   56°   5'   30" | 5
−  55°  +         11° 13' 6"
    1°  60'
       −65'
        65'  −30"
         0'    0"
```

Áreas dinámicas [Matemática e Historia]

Los relojes de sol son instrumentos ideados para medir el paso del tiempo a través del movimiento del Sol. Los egipcios fueron los primeros en construirlos y utilizarlos. Su funcionamiento se basa en el movimiento aparente del Sol en un día cualquiera. El Sol sale por el este, pasa por el sur a mediodía (lo que se considera las 12 de la mañana) y se pone por el oeste. Su movimiento, en este período, puede considerarse constante. Luego, desaparece por el oeste y viaja de nuevo hacia el este (mientras tanto para nosotros será de noche). Así recorre 360° en 24 horas, es decir, que recorre 15° sexagesimales cada hora.

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué tipo de ángulo es el doble de un recto?
   b. ¿Qué tipo de ángulo es y cuánto mide la tercera parte de un ángulo llano?
   c. Indiquén qué cálculo se debe hacer en cada caso.
      - Pasar de grados a minutos.
      - Pasar de minutos a segundos.
      - Pasar de grados a segundos.
      - Pasar de minutos a grados.
      - Pasar de segundos a minutos.
      - Pasar de segundos a grados.

a. Un ángulo llano.
b. Es un ángulo agudo y mide 60°.
c. • Para pasar de grados a minutos multiplicar por 60
• Para pasar de minutos a grados dividir por 60
• Para pasar de minutos a segundos. multiplicar por 60
• Para pasar de segundos a minutos. dividir por 60
• Para pasar de grados a segundos. multiplicar por 3 600
• Para pasar de segundos a grados. dividir por 3 600

ACTIVIDADES

34. Ángulos. Sistema sexagesimal

17. Resuelvan. Luego, indiquen si el ángulo resultante es cóncavo o convexo.

a. 35° 20′ 15″ + 136° 45′ 58″ = 172° 6′ 13″

Convexo

b. 96° 54′ 21″ − 43° 23′ 46″ = 53° 30′ 35″

Convexo

c. 82° 29′ 35″ . 3 = 247° 28′ 45″

Cóncavo

d. 67° 38′ 25″ : 5 = 13° 31′ 41″

Convexo

18. Tengan en cuenta el valor de los ángulos y resuelvan.

$\hat{\alpha}$ = 36° 45′ 58″ $\hat{\beta}$ = 57° 27′ 37″ $\hat{\gamma}$ = 29° 56′ 45″

a. $(\hat{\alpha} - \hat{\gamma})$. 2 =

(36° 45′ 58″ − 29° 56′ 45″) . 2 =

6° 49′ 13″ . 2 =

13° 38′ 26″

b. $(\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma})$: 4 =

(36° 45′ 58″ + 57° 27′ 37″ + 29° 56′ 45″) : 4 =

124° 10′ 20″ : 4 =

31° 2′ 35″

c. $(\hat{\gamma} + \hat{\alpha}) - (\hat{\beta} - \hat{\alpha})$ =

(29° 56′ 45″ + 36° 45′ 58″) − (57° 27′ 37″ − 36° 45′ 58″) =

66° 42′ 43″ − 26° 41′ 39″ =

46° 1′ 4″

d. $\hat{\gamma} - 2 . \hat{\alpha}$ = Fe de erratas: debe ser 2 . $\hat{\gamma} - \hat{\alpha}$

2 . 29° 56′ 45″ −36° 45′ 58″ =

59° 53′ 30″ − 36° 45′ 58″ =

23° 7′ 32″

e. 3 . $\hat{\gamma} - (\hat{\beta} - \hat{\alpha})$ =

3 . 29° 56′ 45″ − (57° 27′ 37″ − 36° 45′ 58″) =

89° 50′ 15″ − 20° 41′ 39″ =

69° 8′ 36″

f. 2 . $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ =

2 . 36° 45′ 58″ − 57° 27′ 37″ =

73° 31′ 56″ − 57° 27′ 37″ =

16° 4′ 19″

19. Lean atentamente y resuelvan.

Marcos dibujó tres ángulos con las siguientes medidas: 35° 10′, 40° 30′ y 50° 40′.

a. ¿Cuál es la suma de las medidas de los tres ángulos?

35° 10′ + 40° 30′ + 50° 40′ = 126° 20′

La suma de los tres ángulos es 126° 20′.

b. ¿Cuánto debe medir un ángulo para que la suma entre este y los tres anteriores sea 180º? ¿Y para que la suma sea 360º?

180° − 126° 20′ = 53° 40′ Para que sumen 180° el ángulo debe medir 53° 40′.

360° − 126° 20′ = 233° 40′ Para que sumen 360° el ángulo debe medir 233° 40′.

34. Ángulos. Sistema sexagesimal

20. Planteen el cálculo y resuelvan.

a. El doble de la diferencia entre 120° 45' 4" y 25° 43' 28". 2 . (120° 45' 4" – 25° 43' 28") = 2 . 95° 1' 36" = 190° 3' 12"

b. La suma entre el doble de 24° 6' 43" y el triple de 37° 40' 15". 2 . 24° 6' 43" + 3 . 37° 40' 15" = 48° 13' 26" + 113° 45" = 161° 14' 11"

c. La mitad de 145° 54' 28", aumentada en 28° 50' 38". 145° 54' 28" : 2 + 28° 50' 38" = 72° 57' 14" + 28° 50' 38" = 101° 47' 52"

d. El triple de 78° 39' 21", disminuido en 13° 56". 3 . 78° 39' 21" – 13° 56" = 235° 58' 3" – 13° 56" = 222° 57' 7"

21. Resuelvan los siguientes cálculos combinados.

a. 234° 46' 55" : 5 – 36° 23' 47" + 2 . 59° 24' 54" =

46° 57' 23" – 36° 23' 47" + 118° 49' 48" =

10° 33' 36" + 118° 49' 48" =

129° 23' 24"

b. 4 . 26° 32' 57" + 124° 37' 51" : 3 =

106° 11' 48" + 41° 32' 37" =

147° 44' 25"

c. 3 . (236° 43' 49" – 167° 27' 39") + 23° 46" : 2 =

3 . 69° 16' 10" + 11° 30' 23" =

207° 48' 30" + 11° 30' 23" =

219° 18' 53"

d. 305° 36' 42" – (239° 35" : 5) =

305° 36' 42" – 47° 48' 7" =

257° 48' 35"

22. Planteen y resuelvan.

a. Un ángulo que mide 179° 36' 15" se divide en cinco partes iguales. ¿Cuál es la medida de cada parte?

179° 36' 15" : 5 = 35° 55' 15"

Cada parte mide 35° 55' 15".

b. Al doble de un ángulo que mide 78° 46' 30" se lo quiere dividir en tres partes iguales. ¿Cuál es la medida de cada parte?

2 . 78° 46' 30" : 3 = 157° 33' : 3 = 52° 31'

Cada parte mide 52° 31'.

23. Tengan en cuenta los datos y hallen la medida del ángulo $\hat{c}$.

$\hat{c}$ = 2 . (a + b) $\hat{a}$ = 15° 25' 6" $\hat{b}$ = 36° 10' 20"

$\hat{c}$ = 2 . (15° 25' 6" + 36° 10' 20") = 2 . 51° 35' 26" = 103° 10' 52"

34. Ángulos. Sistema sexagesimal

20. Planteen el cálculo y resuelvan.

a. El doble de la diferencia entre 120° 45′ 4″ y 25° 43′ 28″. 2 . (120° 45′ 4″ – 25° 43′ 28″) = 2 . 95° 1′ 36″ = 190° 3′ 12″

b. La suma entre el doble de 24° 6′ 43″ y el triple de 37° 40′ 15″. 2 . 24° 6′ 43″ + 3 . 37° 40′ 15″ = 48° 13′ 26″ + 113° 45″ =
161° 14′ 11″

c. La mitad de 145° 54′ 28″, aumentada en 28° 50′ 38″. 145° 54′ 28″ : 2 + 28° 50′ 38″ = 72° 57′ 14″ + 28° 50′ 38″ =
101° 47′ 52″

d. El triple de 78° 39′ 21″, disminuido en 13° 56″. 3 . 78° 39′ 21″ – 13° 56″ = 235° 58′ 3″ – 13° 56″ =
222° 57′ 7″

21. Resuelvan los siguientes cálculos combinados.

a. 234° 46′ 55″ : 5 – 36° 23′ 47″ + 2 . 59° 24′ 54″ =

46° 57′ 23″ – 36° 23′ 47″ + 118° 49′ 48″ =
10° 33′ 36″ + 118° 49′ 48″ =
129° 23′ 24″

b. 4 . 26° 32′ 57″ + 124° 37′ 51″ : 3 =

106° 11′ 48″ + 41° 32′ 37″ =
147° 44′ 25″

c. 3 . (236° 43′ 49″ – 167° 27′ 39″) + 23° 46″ : 2 =

3 . 69° 16′ 10″ + 11° 30′ 23″ =
207° 48′ 30″ + 11° 30′ 23″ =
219° 18′ 53″

d. 305° 36′ 42″ – (239° 35″ : 5) =

305° 36′ 42″ – 47° 48′ 7″ =
257° 48′ 35″

22. Planteen y resuelvan.

a. Un ángulo que mide 179° 36′ 15″ se divide en cinco partes iguales. ¿Cuál es la medida de cada parte?

179° 36′ 15″ : 5 = 35° 55′ 15″ ^
Cada parte mide 35° 55′ 15″.

b. Al doble de un ángulo que mide 78° 46′ 30″ se lo quiere dividir en tres partes iguales. ¿Cuál es la medida de cada parte?

2 . 78° 46′ 30″ : 3 = 157° 33′ : 3 = 52° 31′
Cada parte mide 52° 31′.

23. Tengan en cuenta los datos y hallen la medida del ángulo $\hat{c}$.

$\hat{c}$ = 2 . (a + b) $\hat{a}$ = 15° 25′ 6″ $\hat{b}$ = 36° 10′ 20″

$\hat{c}$ = 2 . (15° 25′ 6″ + 36° 10′ 20″) = 2 . 51° 35′ 26″ = 103° 10′ 52″

34. Ángulos. Sistema sexagesimal

24. Resuelvan.

Los rayos del Sol entran por la mañana en una habitación y se reflejan en la pared con una determinada inclinación. A las 7 de la mañana de un día de mucho Sol ese ángulo era de 22° 14'. Cada hora que pasa el ángulo de inclinación aumenta en 2° 10' 20".

a. ¿Qué ángulo tendrá a las 8 de la mañana? 22° 14' + 2° 10' 20" = 24° 24' 20"

b. ¿Qué ángulo tendrá a las 9 de la mañana? 24° 24' 20" + 2° 10' 20" = 26° 34' 40"

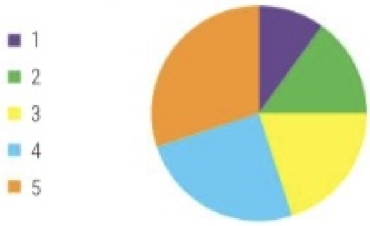
c. ¿Cuál será el ángulo a las 13 horas? 6 . 2° 10' 20" + 22° 14' = 13° 2' + 22° 14' = 35° 16'

25. Observen los resultados de la encuesta y resuelvan.

Los alumnos de 2.º año registraron los datos de una encuesta que les realizaron a 100 chicos de la escuela para saber qué deportes practican más durante el fin de semana. Confeccionaron el siguiente gráfico.

- Natación: 10 [1]
- Vóley: 25 [4]
- Fútbol: 30 [5]
- Tenis: 20 [3]
- Básquet: 15 [2]

Deporte practicado



a. Completen con el número que corresponde a la porción del gráfico del deporte correspondiente.

b. ¿Qué medida angular representa cada deporte?
Natación: 10/100 . 360° = 36°; vóley: 25/100 . 360° = 90°; fútbol: 30/100 . 360° = 108°; tenis: 20/100 . 360° = 72°; básquet: 15/100 . 360° = 54°.

TracO **26. Realicen con sus compañeros una encuesta entre los estudiantes de la escuela de un tema que les interese conocer. Registren los resultados y realicen un gráfico de torta como en el problema anterior para representarlos. Pueden seguir los siguientes pasos.** A cargo del alumno.

1. Elección del tema: pueden dar opciones de respuestas para faciliar el registro.
2. Registro de los datos: pueden hacerlo en una tabla, en una hoja o en una planilla de cálculo.
3. Realización del gráfico de torta: para calcular la medida de cada sector angular, pueden dividir la cantidad de respuestas de una opción (R) por la cantidad total de encuestados (E) y, luego, multiplicar el resultado por 360°.

$$\frac{R}{E} \cdot 360°$$

DinámicaMente

Un reloj de agujas marca las 4 y 15 de la tarde.

a. Si el minutero recorre un ángulo de 240°, ¿qué nueva hora marca el reloj? 4:55 h de la tarde.

b. Si el reloj marca las 4 y 35 de esa tarde, ¿qué ángulo recorrió el minutero? 120°

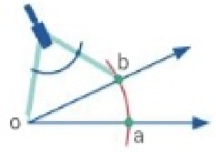
c. Si pasó exactamente media hora, ¿qué ángulo recorrió el minutero? 180°

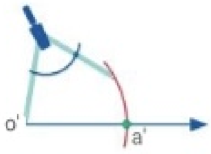
35. Ángulos congruentes. Bisectriz

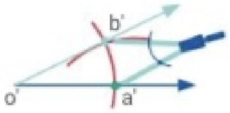
▶ SABERES DINÁMICOS

Ángulos congruentes

Para **construir un ángulo congruente a uno dado**, pueden seguir estos pasos:





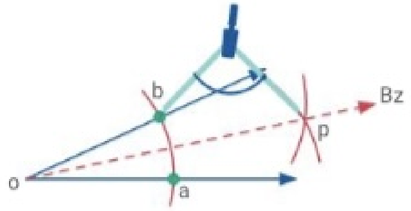


1. Con centro en o (vértice del ángulo dato), se dibuja un arco de tal forma que queden determinados los puntos a y b.	**2.** Con la misma abertura y con centro en el origen o' de una semirrecta, se dibuja un arco de tal forma que quede determinado el punto a'.	**3.** Con el compás se toma la medida de $\overset{\frown}{ab}$ (del ángulo dato) y con centro en a' se corta al arco anterior en b'. Se dibuja $\overrightarrow{o'b'}$ para formar el ángulo.

Bisectriz de un ángulo

Se denomina **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta que lo divide en dos ángulos congruentes.

Para trazar la bisectriz, pueden seguir estos pasos:



1. Con centro en o, se traza un arco que corte a los dos lados del ángulo en los puntos a y b.

2. Con la misma abertura y con centro en a, se traza un arco; luego, con centro en b, se traza otro arco que corte al anterior, por ejemplo, en p.

3. Se dibuja la semirrecta $\overrightarrow{op}$, que es la bisectriz (se escribe Bz).

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/bisectriz * para mirar un video donde se muestran estos pasos.

* Enlace acortado de https://youtu.be/XMLiuKj-nuOI?t=86

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

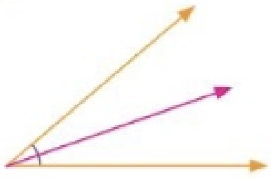
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué es la bisectriz de un ángulo?
   b. ¿Qué propiedad tienen los puntos pertenecientes a la bisectriz de un ángulo?
   c. Si se traza la bisectriz de un ángulo de una amplitud dada, ¿qué operación permite conocer la medida de cada uno de los ángulos que quedan determinados?

a. Es la semirrecta con origen en el vértice de un ángulo que lo divide en dos ángulos congruentes.
b. Equidistan de los lados del ángulo.
c. Dividir la medida del ángulo por 2.

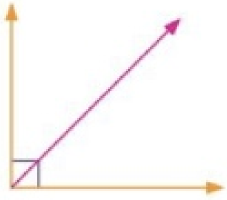
35. Ángulos congruentes. Bisectriz

27. Tracen la bisectriz de los siguientes ángulos.

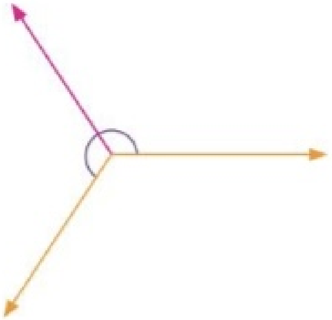
a.



b.

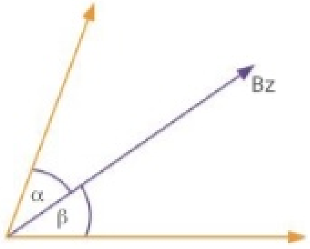


c.



28. Observen las figuras de análisis y calculen el valor de "x" y de cada uno de los ángulos pedidos.

a. $\hat{\alpha} = 3x + 2°$; $\hat{\beta} = 4x - 9°$



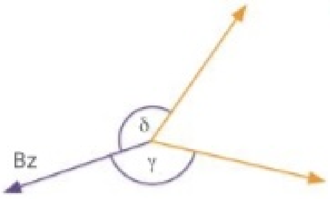
$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \rightarrow 3x + 2° = 4x - 9° \rightarrow 2° + 9° = 4x - 3x \rightarrow 11° = x$

$\hat{\alpha} = 3x + 2° = 3 . 11° + 2° = 33° + 2° = 35°$

$\hat{\beta} = 4x - 9° = 4 . 11° - 9° = 44° - 9° = 35°$

x = 11° ; $\hat{\alpha}$ = 35° ; $\hat{\beta}$ = 35°

b. $\hat{\delta} = 10x + 9°$; $\hat{\gamma} = 14x - 51°$



TIP

Una figura de análisis es un dibujo en donde se dan datos para resolver un problema, pero que no respeta las medidas.

$\hat{\delta} = \hat{\gamma} \rightarrow 10x + 9° = 14x - 51° \rightarrow 9° + 51° = 14x - 10x \rightarrow 60° = 4x \rightarrow 15° = x$

$\hat{\delta} = 10x + 9° = 10 . 15° + 9° = 150° + 9° = 159°$

$\hat{\gamma} = 14x - 51° = 14 . 15° - 51° = 210° - 51° = 159°$

x = 15° ; $\hat{\gamma}$ = 159° ; $\hat{\delta}$ = 159°

PenCrit **29.** Respondan. Realicen gráficos en la carpeta para explicar cada caso.

a. ¿Qué relación existe entre los lados de un ángulo llano y su bisectriz?

Son perpendiculares.

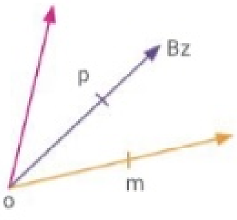
b. ¿Qué tipo de ángulos determina la bisectriz de un ángulo obtuso? Determina dos ángulos agudos.

c. ¿Qué tipo de ángulos determina la bisectriz de un ángulo cóncavo? Determina dos ángulos obtusos.

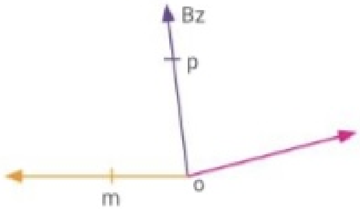
d. ¿Qué tipo de ángulos determina la bisectriz de un ángulo agudo? Determina dos ángulos agudos.

30. Completen el ángulo, teniendo en cuenta que $\overrightarrow{op}$ es la bisectriz de $m\hat{o}n$, y $\overrightarrow{om}$ es uno de los lados.

a.



b.



PenCrit **31. Realicen las siguientes construcciones y expliquen sus respuestas.**

a. Tracen una circunferencia con un radio de 3 cm. Tracen un diámetro y una cuerda.

- ¿Cuánto mide el diámetro? 6 cm

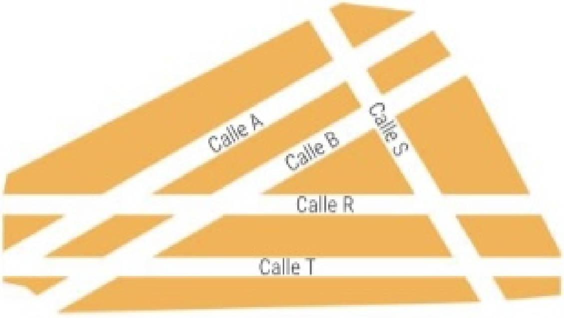
b. Tracen una circunferencia con un diámetro de 5 cm. Tracen otra circunferencia concéntrica a la anterior con un radio de 2 cm.

- ¿Tienen puntos en común? ¿Bajo qué condiciones dos circunferencias concéntricas pueden tener puntos en común? ¿Cuántos puntos compartirían? No. Si tienen el mismo radio. Infinitos puntos.

c. Tracen $\overline{mn}$ = 6 cm y una circunferencia con centro en el punto m y un radio de 4 cm.

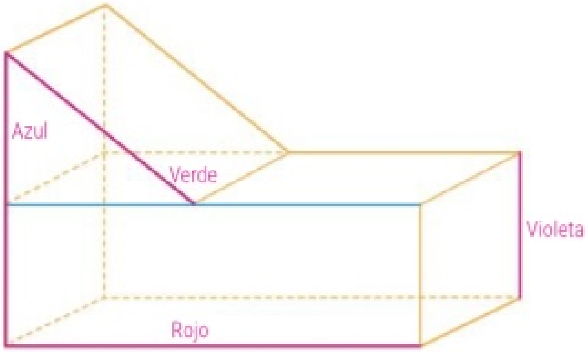
- ¿Qué radio debería tener una circunferencia con centro en el punto n para no tener puntos en común con la otra circunferencia?
Menor que 2 cm o mayor que 10 cm.
- ¿Y para tener un único punto en común?
De 2 cm o de 10 cm.
- ¿Y para tener dos puntos en común?
Mayor que 2 cm y menor que 10 cm.

32. Observen el croquis de las siguientes calles. Consideren las calles como rectas y escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.



a. Las calles A y B son paralelas.	V
b. Las calles A y B son oblicuas.	F
c. Las calles B y R son alabeadas.	F
d. Las calles R y B son oblicuas.	V
e. Las calles S y A son perpendiculares.	V
f. Las calles S y T son paralelas.	F
g. Las calles R y T son paralelas.	V

33. Observen el cuerpo y marquen lo pedido en cada caso.



a. Con rojo, una arista que sea paralela a la celeste.

b. Con azul, una arista que sea perpendicular a la celeste.

c. Con verde, una arista que sea oblicua a la celeste.

d. Con violeta, una arista que sea alabeada con la celeste.

34. Construyan los siguientes segmentos y luego tracen sus mediatrices. A cargo del alumno.

a. $\overline{rs}$ = 4 cm

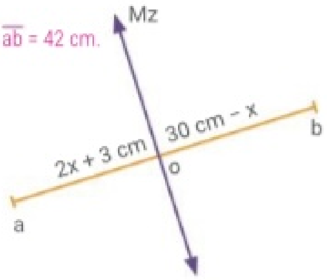
b. $\overline{ab}$ = 5,6 cm

c. $\overline{mn}$ = 9 cm

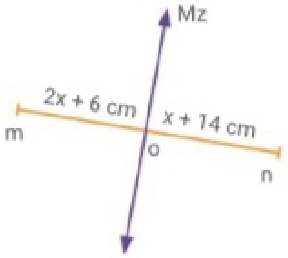
d. $\overline{op}$ = 7,3 cm

35. Calculen la longitud de los segmentos.

a.
x = 9 cm; $\overline{ab}$ = 42 cm.



b. x = 8 cm; $\overline{mn}$ = 44 cm.



36. Completen la tabla.

$\hat{\alpha}$	120° 13′ 27″	98° 35′ 12″	25° 41′ 39″
$2 . \hat{\alpha}$	240° 26′ 54″	197° 10′ 24″	51° 23′ 18″
$\hat{\alpha} : 3$	40° 4′ 29″	32° 51′ 44′	8° 33′ 53″
$180° - \hat{\alpha}$	59° 46′ 33″	81° 24′ 48″	154° 18′ 21″
$\hat{\alpha} + 90°$	210° 13′ 27″	188° 35′ 12″	115° 41′ 39″

37. Resuelvan los siguientes cálculos combinados. Clasifiquen los resultados en cóncavos o convexos.

$\hat{\alpha} = 47° 38' 25''$ $\hat{\beta} = 114° 21'$

$\hat{\gamma} = 92° 7' 36''$ $\hat{\delta} = 235° 23' 12''$

a. $6 . \hat{\alpha} - 2 . (\hat{\delta} - \hat{\beta}) =$ 43° 46′ 6″   Convexo.

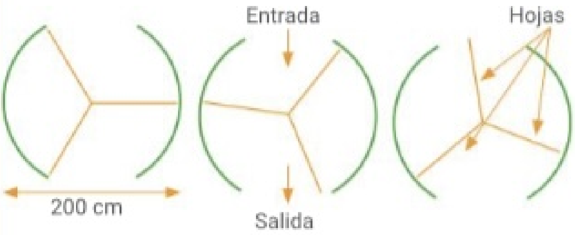
b. $\hat{\gamma} - \hat{\alpha} + \hat{\delta} : 4 =$ 103° 19′ 59″   Convexo.

c. $(\hat{\delta} : 3 + \hat{\alpha} : 5) + 2 . \hat{\gamma} =$ 272° 14′ 37″   Cóncavo.

d. $\hat{\delta} - \hat{\beta} : 3 - (\hat{\gamma} - \hat{\alpha}) =$ 152° 47′ 1″   Convexo.

38. Lean atentamente y resuelvan.

Una puerta giratoria tiene tres hojas que giran dentro de un espacio circular de 2 m de diámetro. Las tres hojas de la puerta dividen el espacio en tres sectores iguales. El siguiente plano muestra las hojas de la puerta en tres posiciones diferentes vistas desde arriba.



a. ¿Cuánto mide el ángulo formado por una hoja de la puerta? ¿Y por dos de las hojas?

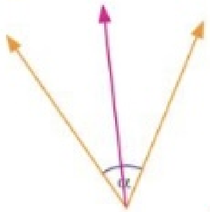
b. ¿Cuánto mide el ancho de cada una de las hojas de la puerta?

c. ¿Se puede decir que cada hoja es la bisectriz del ángulo cóncavo que forman las otras dos?

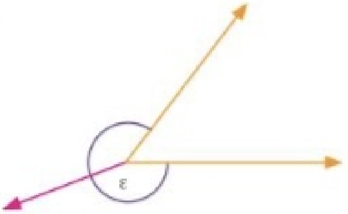
a. Una hoja: 120°; dos hojas: 240°.
b. 100 cm
c. Sí, porque lo divide en dos ángulos congruentes.

39. Copien los siguientes ángulos en la carpeta y tracen su bisectriz.

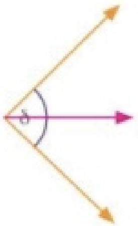
a.



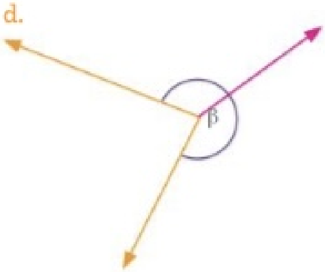
c.



b.



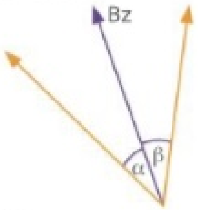
d.



40. Calculen la medida de los ángulos.

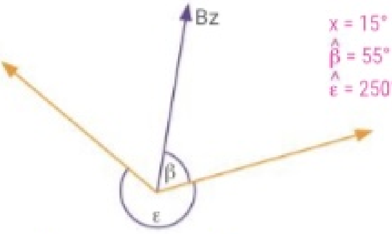
a. $\hat{\alpha} = 4x - 8°$; $\hat{\beta} = 2x + 8°$

x = 8°
$\hat{\alpha}$ = 24°
$\hat{\beta}$ = 24°



b. $\hat{\beta} = 3x + 10°$; $\hat{\varepsilon} = 20x - 50°$

x = 15°
$\hat{\beta}$ = 55°
$\hat{\varepsilon}$ = 250°



41. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas falsas. PenCrit

a. La bisectriz equidista de los extremos del segmento. F

b. La mediatriz de un segmento es perpendicular al mismo. V

c. Si se quiere encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo, debe trazarse la bisectriz del ángulo. V

d. Cualquier par de puntos de un segmento equidista de su mediatriz. F

36. Clasificación de ángulos

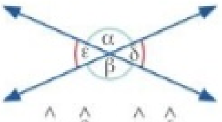
▶ SABERES DINÁMICOS

Clasificación de los ángulos según su medida y su posición

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

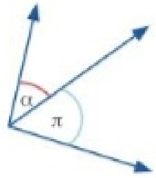
SEGÚN SU POSICIÓN

OPUESTOS POR EL VÉRTICE
Tienen el vértice en común y sus lados son semirrectas opuestas.



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\delta}$

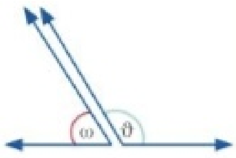
CONSECUTIVOS
Tienen el vértice y un lado en común.



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\pi}$

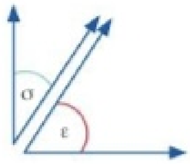
SEGÚN SU MEDIDA

SUPLEMENTARIOS
Su suma es igual a un llano.



$\hat{\omega}$ y $\hat{\vartheta}$

COMPLEMENTARIOS
Su suma es igual a un recto.



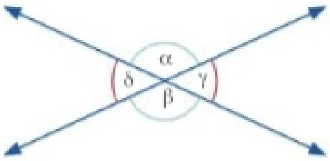
$\hat{\sigma}$ y $\hat{\varepsilon}$

ADYACENTES
Son consecutivos y suplementarios.

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$

Propiedades de los ángulos opuestos por el vértice

Los ángulos **opuestos por el vértice** son **congruentes**.



- $\hat{\alpha}$ y $\hat{\delta}$ son suplementarios, por lo tanto, suman 180º.
- $\hat{\beta}$ y $\hat{\delta}$ son suplementarios, por lo tanto, suman 180º.
- Entonces, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son congruentes.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuál es la medida del ángulo cuyo complemento vale 0°? ¿Y la del ángulo cuyo suplemento vale 0°?
   b. ¿Cuál es el complemento de $\hat{\phi}$ = 36° 59′ 59″? ¿Y el suplemento?
   c. Dibujen un ejemplo de cada caso.
   - Ángulos opuestos por el vértice.
   - Ángulos consecutivos.
   - Ángulos complementarios.
   - Ángulos suplementarios.
   - Ángulos adyacentes.

ApAp

a. El complemento de 0° es 90°. El suplemento de 0° es 180°.
b. El complemento es 53° 1″. El suplemento es 143° 1″.
c. A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

36. Clasificación de ángulos

42. Completen las tablas.

Ángulo	Complemento
45° 38' 17"	44° 21' 43"
22° 59' 17"	67° 43"
79° 54' 23"	10° 5' 37"

Ángulo	Suplemento
112° 35' 42"	67° 24' 18"
23° 27' 41"	156° 32' 19"
98° 54' 31"	81° 5' 29"

PenCrit **43. Escriban V (verdadero) o F (falso) y expliquen las respuestas falsas en la carpeta.**

a. Los ángulos complementarios siempre suman 90°. V

b. Los ángulos opuestos por el vértice a veces son congruentes. Los ángulos opuestos por el vértice siempre son congruentes. F

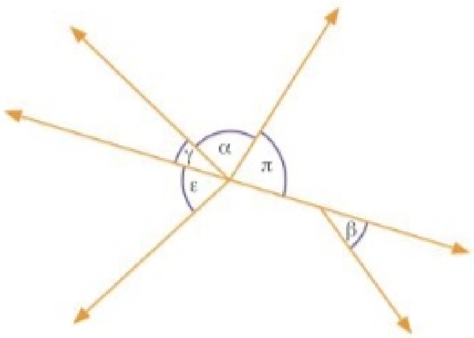
c. Los ángulos suplementarios siempre suman 90°. Los ángulos suplementarios suman 180°. F

d. Los ángulos consecutivos siempre son adyacentes. No siempre suman 180°. F

e. Los ángulos adyacentes siempre son consecutivos. V

f. Los ángulos opuestos por el vértice solo tienen en común el vértice y un lado. Tienen en común el vértice y sus lados son semirrectas opuestas. F

44. Observen el gráfico y marquen con una X las opciones correctas. Expliquen las respuestas en la carpeta.



a. $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ son consecutivos. V
Tienen el vértice y un lado en común.

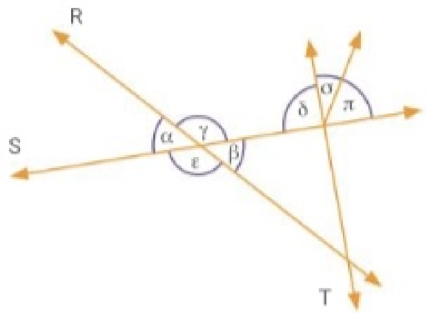
b. $\hat{\pi}$ y $\hat{\beta}$ son consecutivos. F
No comparten el vértice.

c. $\hat{\gamma}$ y $\hat{\pi}$ son opuestos por el vértice. F
Sus lados no son semirrectas opuestas.

d. $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\alpha}$ son consecutivos. F
No comparten ningún lado.

45. Observen el gráfico y completen con los pares de ángulos que cumplan con las condiciones pedidas en cada caso. Comparen las respuestas con sus compañeros.

R ⊥ S y S ⊥ T



a. Opuestos por el vértice: $\hat{\gamma}$ y $\hat{\varepsilon}$; $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

b. Consecutivos: $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$; $\hat{\gamma}$ y $\hat{\beta}$; $\hat{\beta}$ y $\hat{\varepsilon}$; $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\alpha}$; $\hat{\delta}$ y $\hat{\sigma}$; $\hat{\sigma}$ y $\hat{\pi}$.

c. Suplementarios: $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$; $\hat{\gamma}$ y $\hat{\beta}$; $\hat{\beta}$ y $\hat{\varepsilon}$; $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\alpha}$.

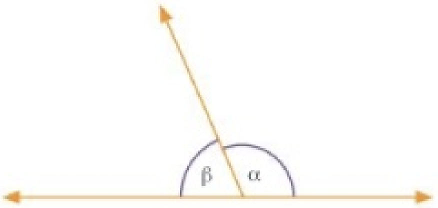
d. Complementarios: $\hat{\sigma}$ y $\hat{\pi}$.

e. Adyacentes: $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$; $\hat{\gamma}$ y $\hat{\beta}$; $\hat{\beta}$ y $\hat{\varepsilon}$; $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\alpha}$.

36. Clasificación de ángulos

46. **Calculen la medida de los ángulos pedidos en cada caso.**

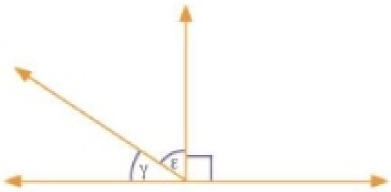
a. $\hat{\alpha} = 110°$



$\hat{\beta} = 180° - \hat{\alpha} = 180° - 110° = 70°$

$\hat{\beta} =$ 70°

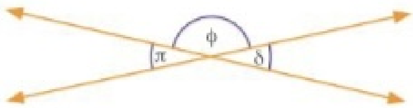
c. $\hat{\gamma} = 37°$



$\hat{\varepsilon} = 180° - \hat{\gamma} - 90° = 180° - 37° - 90° = 53°$

$\hat{\varepsilon} =$ 53°

b. $\hat{\pi} = 24°$

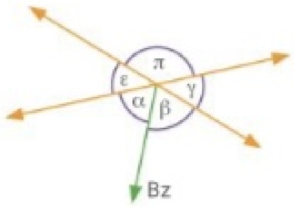


$\hat{\delta} = \hat{\pi} = 24°$

$\hat{\phi} = 180° - \hat{\pi} = 180° - 24° = 156°$

$\hat{\delta} =$ 24° ; $\hat{\phi} =$ 156°

d. $\hat{\alpha} = 55°$



$\hat{\beta} = \hat{\alpha} = 55°; \hat{\gamma} = 180° - 55° - 55° = 70°$

$\hat{\pi} = \hat{\beta} + \hat{\alpha} = 55° + 55° = 110°; \hat{\varepsilon} = \hat{\gamma} = 70°$

$\hat{\beta} =$ 55° ; $\hat{\gamma} =$ 70° ; $\hat{\pi} =$ 110° ; $\hat{\varepsilon} =$ 70°

47. **Planteen y calculen cuánto mide el ángulo en cada caso.**

a. El suplemento de un ángulo es igual al doble de 45°.

180° − x = 2 . 45° → 180° − 90° = x → x = 90°

b. El suplemento del complemento de un ángulo es 113° 12".

180° − (90° − x) = 113° 12" → 180° − 90° + x = 113° 12" → 90° + x = 113° 12" →

x = 113° 12" − 90° → x = 23° 12"

c. La diferencia entre el suplemento de 28° y el complemento de un ángulo es 73° 10'.

(180° − 28°) − (90° − x) = 73° 10' → 152° − 90° + x = 73° 10' → 62° + x = 73° 10' →

x = 73° 10' − 62° → x = 11° 10'

d. La mitad del suplemento de un ángulo es 48° 32'.

(180° − x) : 2 = 48° 32' → 180° − x = 48° 32' . 2 → 180° − x = 97° 4' →

180° − 97° 4' = x → x = 82° 56'

e. El triple del complemento de un ángulo es 67° 21".

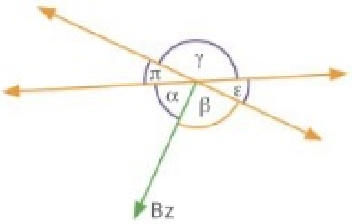
3 . (90° − x) = 67° 21" → 90° − x = 67° 21" : 3 → 90° − x = 22° 20' 7" →

90° − 22° 20' 7" = x → x = 67° 39' 53"

36. Clasificación de ángulos

48. Calculen la medida de cada ángulo.

a. $\hat{\beta} = 72^\circ\ 25'$



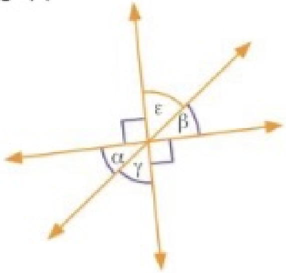
$\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 72^\circ\ 25'$; $\hat{\gamma} = 2 . \hat{\beta} = 2 . 72^\circ\ 25' = 144^\circ\ 50'$;

$\hat{\pi} = 180^\circ - \hat{\gamma} = 180^\circ - 144^\circ\ 50' = 35^\circ\ 10'$; $\hat{\varepsilon} = \hat{\pi} = 35^\circ\ 10'$;

$\hat{\alpha} =$ 72° 25' $\hat{\pi} =$ 35° 10'

$\hat{\varepsilon} =$ 35° 10' $\hat{\gamma} =$ 144° 50'

c. $\hat{\varepsilon} = 50^\circ\ 28'\ 14''$



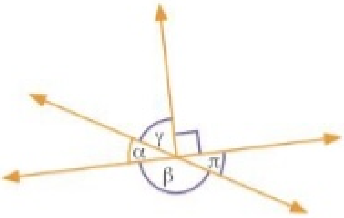
$\hat{\alpha} = 180^\circ - 90^\circ - \hat{\varepsilon} = 90^\circ - 50^\circ\ 28'\ 14'' = 39^\circ\ 31'\ 46''$;

$\hat{\gamma} = \hat{\varepsilon} = 50^\circ\ 28'\ 14''$; $\hat{\beta} = \hat{\alpha} = 39^\circ\ 31'\ 46''$

$\hat{\alpha} =$ 39° 31' 46" $\hat{\beta} =$ 39° 31' 46"

$\hat{\gamma} =$ 50° 28' 14"

b. $\hat{\alpha} = 29^\circ\ 37'\ 18''$



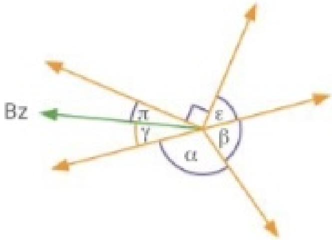
$\hat{\pi} = \hat{\alpha} = 29^\circ\ 37'\ 18''$; $\hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 29^\circ\ 37'\ 18'' = 150^\circ\ 22'\ 42''$

$\hat{\gamma} = 180^\circ - 90^\circ - \hat{\alpha} = 90^\circ - 29^\circ\ 37'\ 18'' = 60^\circ\ 22'\ 42''$

$\hat{\pi} =$ 29° 37' 18" $\hat{\beta} =$ 150° 22' 42"

$\hat{\gamma} =$ 60° 22' 42"

d. $\hat{\alpha} = 96^\circ\ 35'\ 19''$; $\hat{\gamma} = 22^\circ\ 29'\ 20''$



$\hat{\pi} = \hat{\gamma} = 22^\circ\ 29'\ 20''$; $\hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 96^\circ\ 35'\ 19'' = 83^\circ\ 24'\ 41''$;

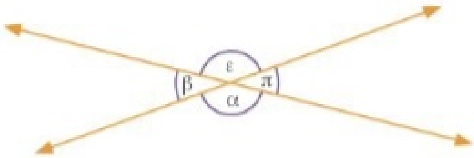
$\hat{\varepsilon} = 180^\circ - 90^\circ - 2 . \hat{\gamma} = 90^\circ - 2 . 22^\circ\ 29'\ 20'' = 90^\circ - 44^\circ\ 58'\ 40'' = 45^\circ\ 1'\ 20''$

$\hat{\pi} =$ 22° 29' 20" $\hat{\beta} =$ 83° 24' 41"

$\hat{\varepsilon} =$ 45° 1' 20"

49. Calculen el valor de "x" y la medida de los ángulos.

a. $\hat{\beta} = 6x + 2^\circ$; $\hat{\pi} = 7x - 3^\circ$



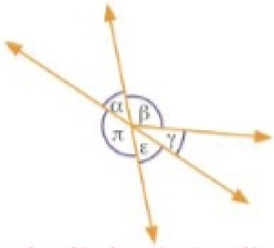
$\hat{\beta} = \hat{\pi} \rightarrow 6x + 2^\circ = 7x - 3^\circ \rightarrow 2^\circ + 3^\circ = 7x - 6x \rightarrow 5^\circ = x$

$\hat{\beta} = 6 . 5^\circ + 2^\circ = 30^\circ + 2^\circ = 32^\circ$; $\hat{\pi} = 7 . 5^\circ - 3^\circ = 35^\circ - 3^\circ = 32^\circ$

$\hat{\varepsilon} = 180^\circ - \hat{\beta} = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$; $\hat{\alpha} = \hat{\varepsilon} = 148^\circ$

x = 5° ; $\hat{\beta} =$ 32° ; $\hat{\pi} =$ 32° ; $\hat{\varepsilon} =$ 148° ; $\hat{\alpha} =$ 148°

b. $\hat{\beta} = 9x - 3^\circ$; $\hat{\gamma} = 3x + 1^\circ$; $\hat{\varepsilon} = 4x - 10^\circ$



$\hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} = 180^\circ \rightarrow 9x - 3^\circ + 3x + 1^\circ + 4x - 10^\circ = 180^\circ \rightarrow$

$16x - 12^\circ = 180^\circ \rightarrow 16x = 180^\circ + 12^\circ \rightarrow x = 192^\circ : 16^\circ \rightarrow x = 12^\circ$

$\hat{\beta} = 9 . 12^\circ - 3^\circ = 108^\circ - 3^\circ = 105^\circ$; $\hat{\gamma} = 3 . 12^\circ + 1^\circ = 36^\circ + 1^\circ = 37^\circ$;

$\hat{\varepsilon} = 4 . 12^\circ - 10^\circ = 48^\circ - 10^\circ = 38^\circ$; $\hat{\alpha} = \hat{\varepsilon} = 38^\circ$;

$\hat{\pi} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$

x = 12° ; $\hat{\beta} =$ 105° ; $\hat{\gamma} =$ 37° ; $\hat{\varepsilon} =$ 38° ; $\hat{\alpha} =$ 38° ; $\hat{\pi} =$ 142°

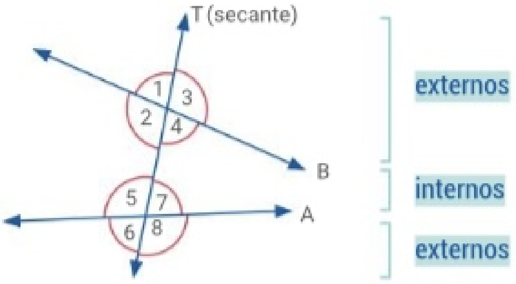
37. Ángulos determinados por dos rectas y una transversal

▶ SABERES DINÁMICOS

Los ángulos determinados por dos rectas y una transversal (es la recta que las interseca) se pueden clasificar de la siguiente forma.

- Ángulos **correspondientes**: son los pares de ángulos no adyacentes que están en el mismo semiplano respecto de la secante; uno es interno y el otro es externo.
- Ángulos **alternos**: son los pares de ángulos (internos o externos) no adyacentes que están en distintos semiplanos respecto de la secante.
- Ángulos **conjugados**: son los pares de ángulos (internos o externos) que están en el mismo semiplano respecto de la secante.

La recta T es secante porque interseca a A y B; T divide el plano en dos semiplanos.



Por ejemplo:

$\hat{7}$ y $\hat{3}$ son correspondientes.

$\hat{4}$ y $\hat{5}$ son alternos internos.

$\hat{3}$ y $\hat{6}$ son alternos externos.

$\hat{2}$ y $\hat{5}$ son conjugados internos.

$\hat{1}$ y $\hat{6}$ son conjugados externos.

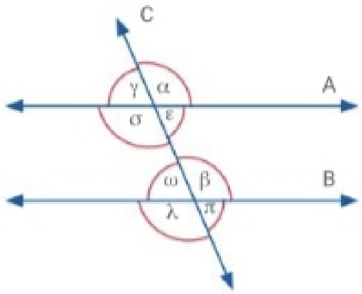
Si las rectas A y B son paralelas, se cumplen las siguientes propiedades:

- Los ángulos correspondientes son congruentes.
- Los ángulos alternos son congruentes.
- Los ángulos conjugados son suplementarios.

TIP

$\cong$ significa "es congruente con".

A // B y C transversal



Por ejemplo:

$\hat{\varepsilon} \cong \hat{\pi}$ por ser correspondientes.

$\hat{\gamma} \cong \hat{\pi}$ por ser alternos externos.

$\hat{\varepsilon} \cong \hat{\omega}$ por ser alternos internos.

$\hat{\sigma} + \hat{\omega} = 180°$ por ser conjugados internos.

$\hat{\alpha} + \hat{\pi} = 180°$ por ser conjugados externos.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Escriban un sinónimo de recta secante.
   b. ¿Es posible que todos los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal sean congruentes?
   ApAp c. Dibujen dos rectas paralelas y una transversal a ellas. Marquen con el mismo color todos los ángulos que son congruentes.

a. Transversal, recta que interseca a las otras dos.
b. Sí, en el caso de que la transversal sea perpendicular a las paralelas.
c. A cargo del alumno.

37. Ángulos determinados por dos rectas y una transversal

50. Completen el gráfico con el nombre del ángulo teniendo en cuenta los datos. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y discutan la validez de sus elecciones.

a. $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ son ángulos correspondientes.

b. $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ son ángulos alternos internos.

c. $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos opuestos por el vértice.

d. $\hat{\beta}$ y $\hat{\pi}$ son ángulos correspondientes.

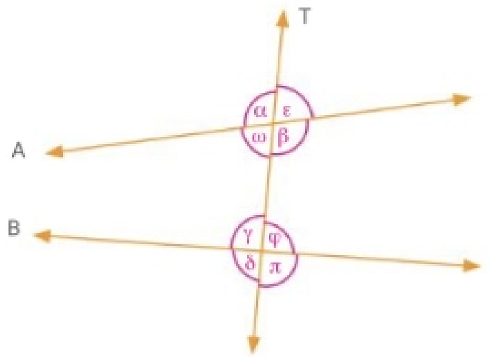
e. $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\pi}$ son ángulos conjugados externos.

f. $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\delta}$ son ángulos alternos externos.

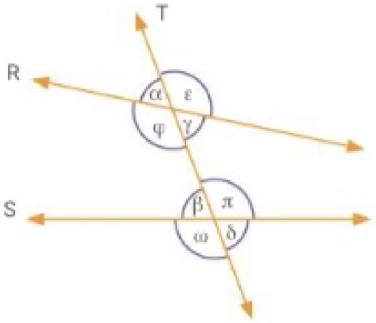
g. $\hat{\omega}$ y $\hat{\gamma}$ son ángulos conjugados internos.

h. $\hat{\phi}$ y $\hat{\delta}$ son ángulos opuestos por el vértice.

A y B son oblicuas, T es transversal.



51. Observen el gráfico y completen la tabla con los pares de ángulos que cumplen con las condiciones pedidas.



Correspondientes	Opuestos por el vértice	Adyacentes	Alternos		Conjugados	
			Internos	Externos	Internos	Externos
$\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\pi}$ $\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ $\hat{\varphi}$ y $\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\varphi}$ $\hat{\beta}$ y $\hat{\delta}$ $\hat{\pi}$ y $\hat{\omega}$	$\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\gamma}$ $\hat{\gamma}$ y $\hat{\varphi}$ $\hat{\varphi}$ y $\hat{\alpha}$ $\hat{\alpha}$ y $\hat{\varepsilon}$ $\hat{\beta}$ y $\hat{\pi}$ $\hat{\pi}$ y $\hat{\delta}$ $\hat{\delta}$ y $\hat{\omega}$ $\hat{\omega}$ y $\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$ y $\hat{\beta}$ $\hat{\varphi}$ y $\hat{\pi}$	$\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\omega}$ $\hat{\alpha}$ y $\hat{\delta}$	$\hat{\gamma}$ y $\hat{\pi}$ $\hat{\varphi}$ y $\hat{\beta}$	$\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\delta}$ $\hat{\alpha}$ y $\hat{\omega}$

TracO **52. Tengan en cuenta la actividad anterior y resuelvan en grupos.** Fe de erratas: esta actividad debería llevar ícono grupal.

a. Escriban todos los pares de ángulos cuya relación no aparece en la tabla.

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\pi}$; $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\beta}$; $\hat{\varphi}$ y $\hat{\delta}$; $\hat{\gamma}$ y $\hat{\omega}$.

b. ¿Cómo se relacionan esos ángulos?

Son suplementarios.

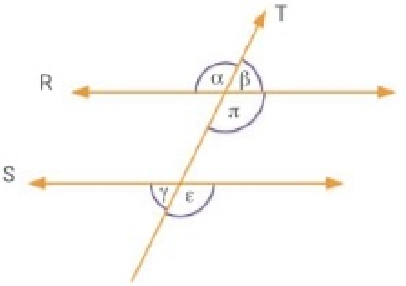
c. Inventen un nombre para ese tipo de ángulos y compártanlos con el resto de la clase.

A cargo del alumno.

37. Ángulos determinados por dos rectas y una transversal

53. **Calculen las medidas de los ángulos pedidos en cada caso. Expliquen la relación que tiene cada uno con el ángulo indicado.**

a. R // S



$\hat{\pi} = 116°$

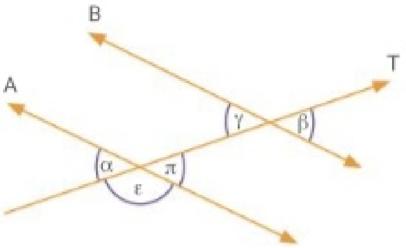
$\hat{\alpha} =$ 116°, por ser opuesto por el vértice con $\hat{\pi}$.

$\hat{\varepsilon} =$ 116°, por ser correspondiente con $\hat{\pi}$.

$\hat{\gamma} =$ 64°, por ser adyacente con $\hat{\varepsilon}$.

$\hat{\beta} =$ 64°, por ser alterno externo con $\hat{\gamma}$.

b. A // B



$\hat{\gamma} = 75° 12''$

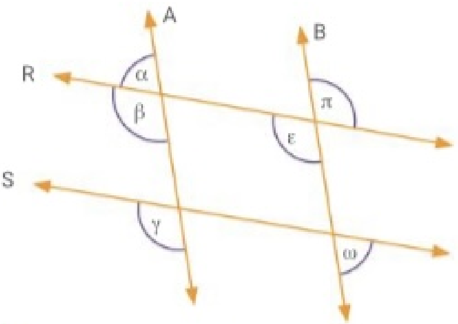
$\hat{\alpha} =$ 75° 12'', por ser correspondiente con $\hat{\gamma}$.

$\hat{\varepsilon} =$ 104° 59' 48'', por ser adyacente con $\hat{\alpha}$.

$\hat{\pi} =$ 75° 12'', por ser alterno interno con $\hat{\gamma}$.

$\hat{\beta} =$ 75° 12'', por ser conjugado externo con $\hat{\varepsilon}$.

c. A // B y R // S



$\hat{\varepsilon} = 102° 37' 58''$

$\hat{\beta} =$ 102° 37' 58'', por ser correspondiente con $\hat{\varepsilon}$.

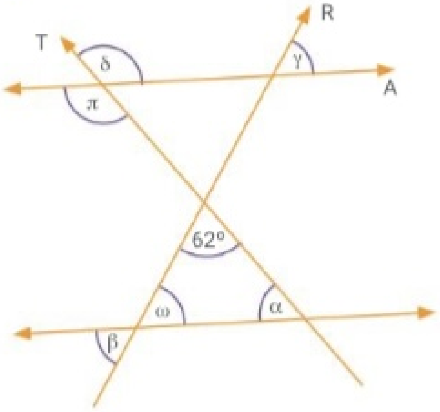
$\hat{\pi} =$ 102° 37' 58'', por ser opuesto por el vértice con $\hat{\varepsilon}$.

$\hat{\alpha} =$ 77° 22' 2'', por ser conjugado externo con $\hat{\pi}$.

$\hat{\gamma} =$ 102° 37' 58'', por ser correspondiente con $\hat{\beta}$.

$\hat{\omega} =$ 77° 22' 2'', por ser conjugado externo con $\hat{\gamma}$.

d. A // B



Tengan en cuenta cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo.

$\hat{\alpha} = 58° 15'$

$\hat{\pi} =$ 121° 45', por ser conjugado interno con $\hat{\alpha}$.

$\hat{\delta} =$ 121° 45', por ser opuesto por el vértice con $\hat{\pi}$.

$\hat{\omega} =$ 59° 45', por suma de áng. interiores del triángulo con $\hat{\alpha}$ y 62°.

$\hat{\gamma} =$ 59° 45', por ser correspondiente con $\hat{\omega}$.

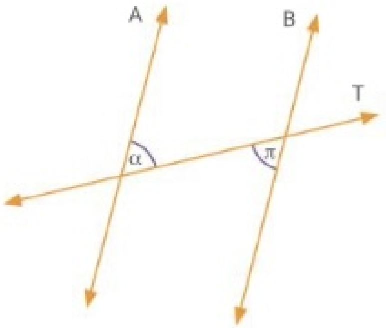
$\hat{\beta} =$ 59° 45', por ser alterno externo con $\hat{\gamma}$.

37. Ángulos determinados por dos rectas y una transversal

54. Calculen el valor de "x" y de la medida de los ángulos pedidos.

a. $\hat{\alpha} = 10x + 5°$; $\hat{\pi} = 12x - 11°$

A // B



$\hat{\alpha} = \hat{\pi} \rightarrow 10x + 5° = 12x - 11° \rightarrow 5° + 11° = 12x - 10x \rightarrow$

$16° = 2x \rightarrow 16° : 2 = x \rightarrow x = 8°$

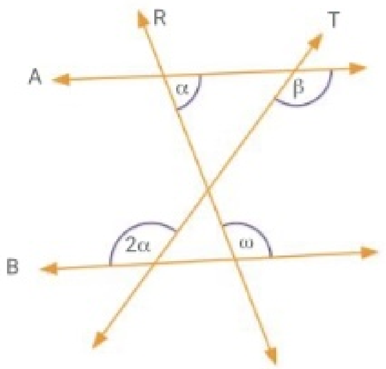
$\hat{\alpha} = 10x + 5° = 10 \,.\, 8° + 5° = 80° + 5° = 85°$

$\hat{\pi} = 12x - 11° = 12 \,.\, 8° - 11° = 96° = 85°$

x = 8° ; $\hat{\alpha}$ = 85° ; $\hat{\pi}$ = 85°

c. $\hat{\alpha} = 3x + 20°$; $\hat{\omega} = 12x - 25°$

A // B



$\hat{\alpha} + \hat{\omega} = 180° \rightarrow 3x + 20° + 12x - 25° = 180° \rightarrow 15x - 5° = 180° \rightarrow$

$15x = 180° + 5° \rightarrow x = 185° : 15° \rightarrow x = 12°\,20'$

$\hat{\alpha} = 3x + 20° = 3 \,.\, 12°\,20' + 20° = 37° + 20° = 57°$

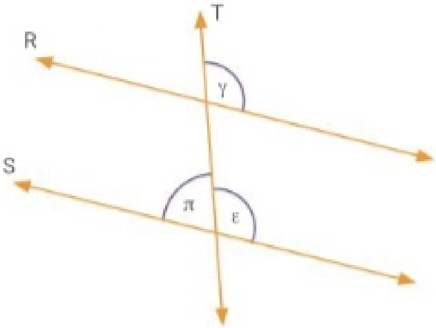
$\hat{\omega} = 12x - 25° = 12 \,.\, 12°\,20' - 25° = 148° - 25° = 123°$

$\hat{\beta} = 2 \,.\, \hat{\alpha} = 2 \,.\, 57° = 114°$

x = 12° 20' ; $\hat{\alpha}$ = 57° ; $\hat{\omega}$ = 123° ; $\hat{\beta}$ = 114°

b. $\hat{\gamma} = 4x + 15°$; $\hat{\varepsilon} = 6x - 32°$

R // S



$\hat{\gamma} = \hat{\varepsilon} \rightarrow 4x + 15° = 6x - 32° \rightarrow 15° + 32° = 6x - 4x \rightarrow$

$47° = 2x \rightarrow 47° : 2 = x \rightarrow x = 23°\,30'$

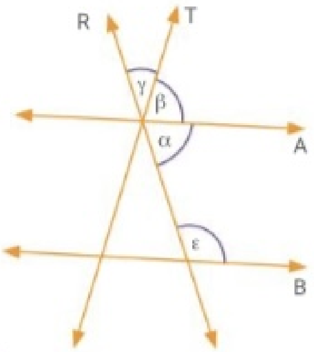
$\hat{\gamma} = 4x + 15° = 4 \,.\, 23°\,30' + 15° = 94° + 15° = 109°$

$\hat{\varepsilon} = 6x - 32° = 6 \,.\, 23°\,30' - 32° = 141° - 32° = 109°$

x = 23° 30' ; $\hat{\gamma}$ = 109° ; $\hat{\varepsilon}$ = 109° ; $\hat{\pi}$ = 71°

d. $\hat{\beta} = 10x + 7°$; $\hat{\gamma} = 5x + 15°$; $\hat{\varepsilon} = 18x - 2°$

A // B



$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta} + \hat{\gamma} \rightarrow 18x - 2° = 10x + 7° + 5x + 15° \rightarrow$

$18x - 10x - 5x = 7° + 15° + 2° \rightarrow 3x = 24° \rightarrow x = 24° : 3 \rightarrow x = 8°$

$\hat{\varepsilon} = 18x - 2° = 18 \,.\, 8° - 2° = 144° - 2° = 142°$

$\hat{\beta} = 10x + 7° = 10 \,.\, 8° + 7° = 80° + 7° = 87°$

$\hat{\gamma} = 5x + 15° = 5 \,.\, 8° + 15° = 40° + 15° = 55°$

$\hat{\alpha} = 180° - \hat{\varepsilon} = 180° - 142° = 38°$

x = 8° ; $\hat{\beta}$ = 55° ; $\hat{\gamma}$ = 87° ; $\hat{\varepsilon}$ = 142° ; $\hat{\alpha}$ = 38°

55. **Traduzcan al lenguaje simbólico; luego, resuelvan teniendo en cuenta los valores de los ángulos.**

$\hat{\alpha} = 132^\circ\ 54'\ 8''$; $\hat{\beta} = 82^\circ\ 39'\ 32''$;

$\hat{\gamma} = 48^\circ\ 31'\ 27''$; $\hat{\varepsilon} = 165^\circ\ 28''$

a. El complemento de la tercera parte de $\hat{\gamma}$.
73° 49' 31"

b. La diferencia entre el suplemento de $\hat{\beta}$ y el complemento de $\hat{\gamma}$.
55° 51' 55"

c. La cuarta parte del suplemento de $\hat{\alpha}$.
11° 46' 28"

d. La diferencia entre el doble de $\hat{\beta}$ y el suplemento de $\hat{\varepsilon}$.
150° 17' 32"

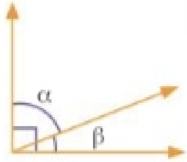
e. La mitad de $\hat{\varepsilon}$ más la cuarta parte de $\hat{\beta}$.
103° 10' 7"

f. La cuarta parte del suplemento de $\hat{\alpha}$ más el complemento de $\hat{\gamma}$.
53° 15' 1"

56. **Calculen el valor de "x" y el de los ángulos indicados.**

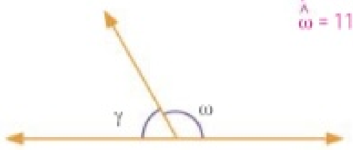
a. $\hat{\alpha} = 3x + 5^\circ$; $\hat{\beta} = x + 4^\circ$

x = 20° 15'
$\hat{\alpha}$ = 65° 45'
$\hat{\beta}$ = 24° 15'



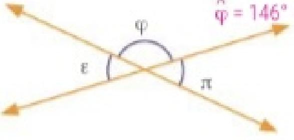
b. $\hat{\gamma} = 2x + 9^\circ$; $\hat{\omega} = 3x + 20^\circ$

x = 30° 12';
$\hat{\gamma}$ = 69° 24'
$\hat{\omega}$ = 110° 36'



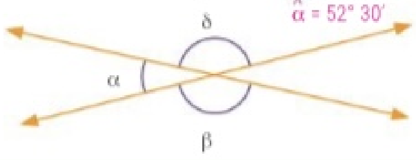
c. $\hat{\varepsilon} = 2x + 6^\circ$; $\hat{\phi} = 10x + 10^\circ$

x = 13° 40'
$\hat{\varepsilon} = \hat{\pi}$ = 33° 20'
$\hat{\varphi}$ = 146° 40'

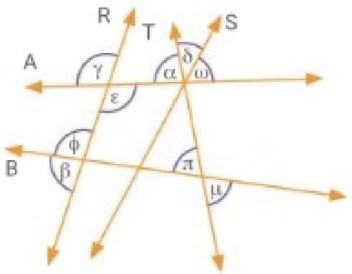


d. $\hat{\beta} = 7x - 23^\circ$; $\hat{\delta} = 5x + 20^\circ$

x = 21° 30'
$\hat{\beta} = \hat{\delta}$ = 127° 30'
$\hat{\alpha}$ = 52° 30'

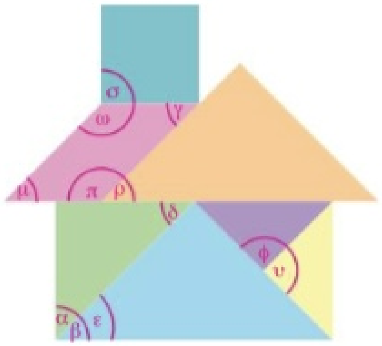


57. **Observen el gráfico y completen la tabla con la clasificación correspondiente para cada par de ángulos.**



Par de ángulos	Clasificación
$\hat{\alpha}$ y $\hat{\pi}$	Correspondientes
$\hat{\delta}$ y $\hat{\omega}$	Consecutivos
$\hat{\alpha}$ y $\hat{\mu}$	Alternos externos
$\hat{\gamma}$ y $\hat{\beta}$	Conjugados externos
$\hat{\phi}$ y $\hat{\varepsilon}$	Alternos internos

58. **Marquen en la figura formada con el *Tangram* pares de ángulos que cumplan con lo pedido, cuando sea posible.**



a. Un par de ángulos complementarios, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

b. Un par de ángulos alternos internos entre paralelas, $\hat{\delta}$ y $\hat{\varepsilon}$.

c. Un par de ángulos conjugados internos entre paralelas, $\hat{\gamma}$ y $\hat{\pi}$.

d. Un par de ángulos consecutivos, $\hat{\omega}$ y $\hat{\sigma}$.

e. Un par de ángulos adyacentes, $\hat{\phi}$ y $\hat{\upsilon}$.

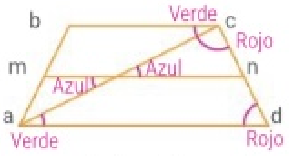
f. Un par de ángulos correspondientes entre paralelas, $\hat{\mu}$ y $\hat{\rho}$.

g. Un par de ángulos opuestos por el vértice, $\hat{\lambda}$ y $\hat{\kappa}$.

No es posible.

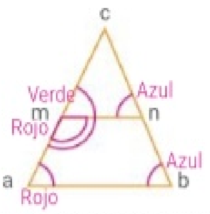
59. **Marquen con color los ángulos pedidos en cada una de las siguientes figuras.**

a. abcd trapecio isósceles, $\overline{mn}$ es base media, $\overline{ac}$ es diagonal.



- Con rojo un par de ángulos conjugados internos entre paralelas.
- Con azul un par de ángulos opuestos por el vértice.
- Con verde un par de ángulos alternos internos entre paralelas.

b. abc triángulo, $\overline{mn}$ base media

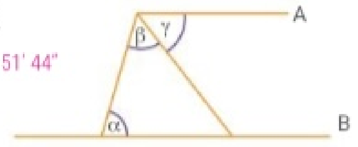


- Con color rojo un par de ángulos conjugados internos entre paralelas.
- Con azul un par de ángulos correspondientes entre paralelas.
- Con verde un par de ángulos adyacentes.

60. **Calculen las medidas de los ángulos pedidos en las siguientes figuras.**

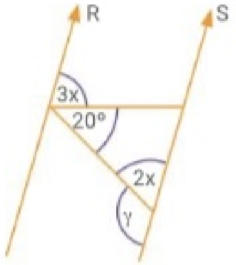
a. A // B, $\hat{\alpha}$, sabiendo que $\hat{\beta}$ = 50° 34' 8" y $\hat{\gamma} \cong \hat{\beta}$.

$\hat{\alpha}$ = 78° 51' 44"



b. R // S, las incógnitas x e y, y todos los ángulos marcados.

x = 32°
y = 116°
$\hat{\gamma}$ = 116°



61. **Completen con "siempre", "a veces" o "nunca", según corresponda.** PenCrit

a. Los ángulos correspondientes [a veces] son congruentes.

b. Los ángulos alternos internos [nunca] son consecutivos.

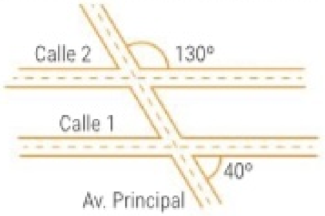
c. Los ángulos conjugados internos entre paralelas [siempre] son suplementarios.

d. Los ángulos opuestos por el vértice [siempre] son congruentes.

e. Los ángulos consecutivos [a veces] son adyacentes.

f. Los ángulos adyacentes [siempre] son suplementarios.

62. **Observen la información del mapa y determinen si las calles 1 y 2 son paralelas. Expliquen la respuesta.**

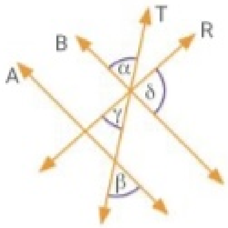


No son paralelas. Los ángulos de 130° y 40° son conjugados internos y si las calles 1 y 2 fueran paralelas deberían sumar 180°.

63. **Calculen el valor de cada uno de los ángulos pedidos.**

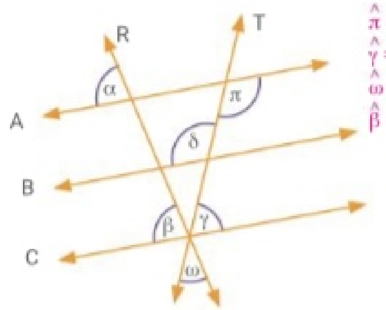
a. A // B, $\hat{\alpha} = 7x + 13°$, $\hat{\beta} = 11x - 12°$, $\hat{\gamma} = 6x - 1°$.

x = 6° 15'
$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ = 56° 45'
$\hat{\gamma}$ = 36° 30'
$\hat{\delta}$ = 86° 45'



b. A // B // C, $\hat{\pi} = 6x + 1°$, $\hat{\omega} = 3x - 24°$, $\hat{\gamma} = 4x - 3°$.

x = 18° 12'
$\hat{\pi} = \hat{\delta}$ = 110° 12'
$\hat{\gamma}$ = 69° 48'
$\hat{\omega}$ = 30° 36'
$\hat{\beta} = \hat{\alpha}$ = 79° 36'



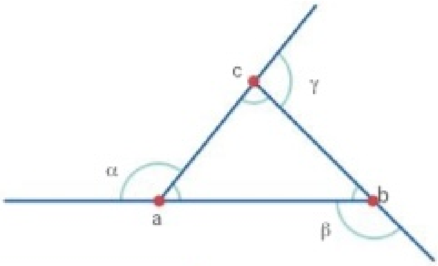
6 Figuras planas

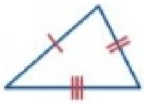
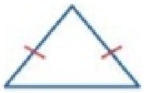
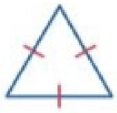
38. Triángulos

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **triángulo** a toda figura de tres lados.
Elementos de un triángulo:

- Vértices: a, b ,c.
- Lados: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$.
- Ángulos interiores: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$.
- Ángulos exteriores: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$.



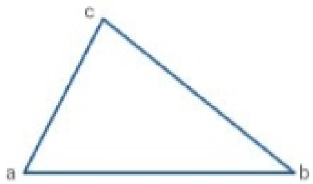
Clasificación de los triángulos según sus lados		
Escaleno: todos sus lados son distintos. 	**Isósceles**: tiene dos lados congruentes. 	**Equilátero**: todos sus lados son congruentes. 

TIP

Los lados que están marcados con la misma cantidad de rayitas son congruentes.

Clasificación de los triángulos según sus ángulos		
Acutángulo: todos sus ángulos son agudos.	**Rectángulo**: tiene un ángulo recto.	**Obtusángulo**: tiene un ángulo obtuso.

En todo triángulo, la medida de cada lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos.



$\overline{ab} < \overline{bc} + \overline{ac}$
$\overline{bc} < \overline{ab} + \overline{ac}$
$\overline{ac} < \overline{ab} + \overline{bc}$

En todo triángulo, la suma de la medida de los ángulos interiores es 180º.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/tria* y miren el video donde se analizan las condiciones para que se pueda dibujar un triángulo.

* Enlace acortado de https://youtu.be/xPLfNiADZB8

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Un triángulo rectángulo, ¿puede ser isósceles?
   b. Con lados de 4 cm, 3 cm y 1 cm, ¿se puede formar un triángulo?
   c. ¿Qué valores puede tomar el tercer lado de un triángulo sabiendo que uno de sus lados mide 4 cm y otro 3 cm?

ApAp

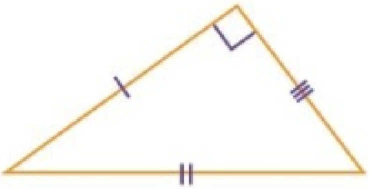
a. Sí, los catetos pueden tener la misma medida.
b. No es posible.
c. Mayores que 1 y menores que 7.

ACTIVIDADES

38. Triángulos

1. Clasifiquen los siguientes triángulos según sus lados y sus ángulos.

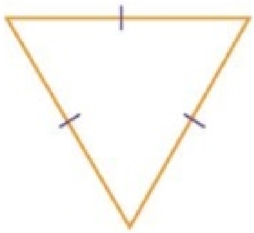
a.



Según sus lados: escaleno

Según sus ángulos: rectángulo

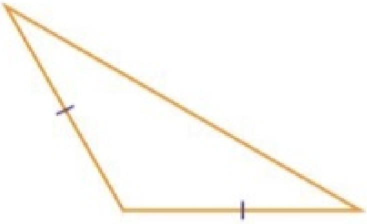
c.



Según sus lados: equilátero

Según sus ángulos: acutángulo

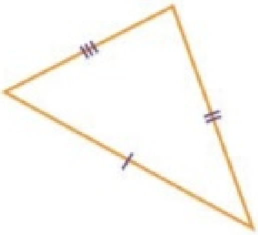
b.



Según sus lados: isósceles

Según sus ángulos: obtusángulo

d.



Según sus lados: escaleno

Según sus ángulos: acutángulo

2. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. Todos los triángulos rectángulos son escalenos. [F]

b. Un triángulo acutángulo puede ser equilátero. [V]

c. Un triángulo obtusángulo puede ser isósceles. [V]

d. Todos los triángulos equiláteros son isósceles. [V]

e. Todo triángulo obtusángulo tiene dos ángulos agudos. [V]

f. Un triángulo equilátero puede ser rectángulo. [F]

3. Marquen con una X las ternas de lados que pueden formar un triángulo.

a. 5 cm, 4 cm y 1 cm [ ]

b. 8 cm, 5 cm y 15 cm [ ]

c. 4 cm, 5 cm y 3 cm [X]

d. 10 cm, 5 cm y 5 cm [ ]

e. 6 cm, 6 cm y 6 cm [X]

f. 4 cm, 8 cm y 5 cm [X]

4. Marquen con una X las ternas de ángulos que puede tener un triángulo.

a. 40°; 50°; 90° [X]

b. 120°; 60°; 20° [ ]

c. 45°; 65°; 70° [X]

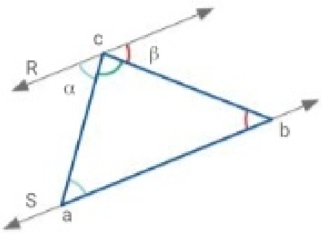
d. 20°; 30°; 50° [ ]

39. Propiedades de los triángulos

▶ SABERES DINÁMICOS

En todo triángulo se cumplen las siguientes **propiedades**:

- La suma de los ángulos interiores es igual a 180°.



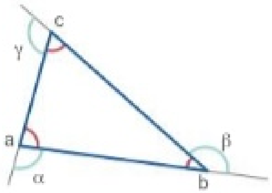
$\hat{\alpha} + \hat{c} + \hat{\beta} = 180°$ están comprendidos en un ángulo llano.

R // S $\hat{a} = \hat{\alpha}$, por ser alternos internos entre paralelas y $\overline{ac}$ transversal.

$\hat{b} = \hat{\beta}$, por ser alternos internos entre paralelas y $\overline{bc}$ transversal.

Por lo tanto, $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$.

- La suma de los ángulos exteriores es igual a 360°.



$\hat{\alpha} + \hat{a} = 180°$ porque son adyacentes: $\hat{\alpha} = 180° - \hat{a}$

$\hat{\beta} + \hat{b} = 180°$ porque son adyacentes: $+\ \hat{\beta} = 180° - \hat{b}$

$\hat{\gamma} + \hat{c} = 180°$ porque son adyacentes: $\hat{\gamma} = 180° - \hat{c}$

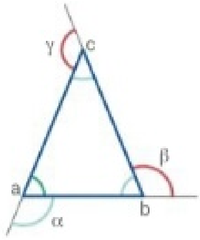
Sumando miembro a miembro.

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 3 \,.\, 180° - (\hat{a} + \hat{b} + \hat{c})$

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 540° - 180°$

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 360°$

- Todo ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.



$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$ y $\hat{\alpha} + \hat{a} = 180°$

Se igualan los primeros miembros.

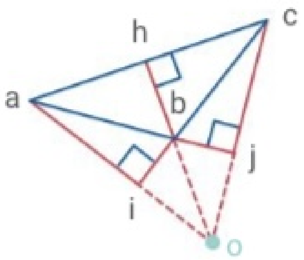
$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \hat{\alpha} + \hat{a}$

$\hat{\alpha} = \hat{b} + \hat{c}$

De la misma forma $\hat{\beta} = \hat{a} + \hat{c}$ y $\hat{\gamma} = \hat{a} + \hat{b}$.

Altura de un triángulo

La **altura** correspondiente al lado de un triángulo es un segmento perpendicular al lado, que tiene por extremos el vértice opuesto y un punto de dicho lado o de su prolongación.



$\overline{cj}$ es la altura de $\overline{ab}$.

$\overline{hb}$ es la altura de $\overline{ac}$.

$\overline{ai}$ es la altura de $\overline{bc}$.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Un ángulo exterior de un triángulo isósceles mide 60°. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior?
   b. Si se tiene en cuenta un ángulo exterior de un triángulo, ¿cuáles son los ángulos interiores no adyacentes? Realicen un dibujo para explicar la respuesta.
   c. Un ángulo exterior de un triángulo mide 118°. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos interiores no adyacentes?

ApAp

a. 120°; 30° y 30°.
b. A cargo del alumno.
c. 118°

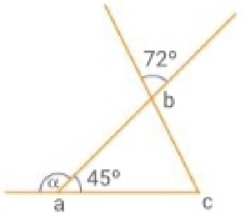
39. Propiedades de los triángulos

5. Completen la tabla teniendo en cuenta que $\hat{\alpha}$; $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ son ángulos exteriores de $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$, respectivamente.

Ángulos interiores			Ángulos exteriores			Clasificación del triángulo según sus ángulos
$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	
90°	45°	45°	90°	135°	135°	Rectángulo
50° 20'	100° 40'	29°	129° 40'	79° 20'	151°	Obtusángulo
60°	75°	45°	120°	105°	135°	Acutángulo

6. Calculen el valor de los ángulos pedidos.

a.

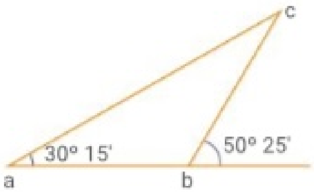


$\hat{\alpha} = 180° - 45° = 135°$

$\hat{c} = 180° - 45° - 72° = 63°$

$\hat{b}$ = 72° ; $\hat{c}$ = 63° ; $\hat{\alpha}$ = 135°

b.



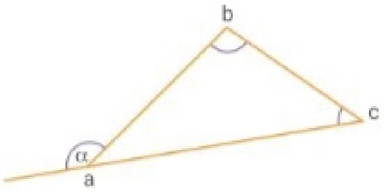
$\hat{b} = 180° - 50° 25' = 129° 35'$

$\hat{c} = 180° - 30° 15' - 129° 35' = 20° 10'$

$\hat{b}$ = 129° 35' ; $\hat{c}$ = 20° 10'

7. Calculen el valor de x y la medida de los ángulos pedidos en cada caso.

a. $\hat{\alpha} = 3x + 30°$; $\hat{b} = x + 50°$; $\hat{c} = x + 10°$

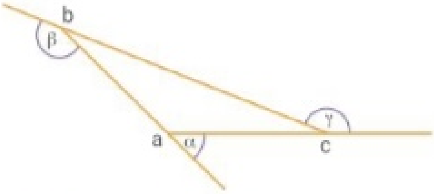


$3x + 30° = x + 50° + x + 10° \rightarrow$

$3x - x - x = 50° + 10° - 30° \rightarrow x = 30°$

x = 30° ; $\hat{\alpha}$ = 120° ; $\hat{b}$ = 80° ; $\hat{c}$ = 40°

b. $\hat{\alpha} = 2x + 10°$; $\hat{\beta} = 3x + 40°$; $\hat{\gamma} = 4x + 40°$



$2x + 10° + 3x + 40° + 4x + 40° = 360° \rightarrow$

$9x + 90° = 360° \rightarrow 9x = 360° - 90° \rightarrow$

$x = 270° : 9 \rightarrow x = 30°$

x = 30° ; $\hat{\alpha}$ = 70° ; $\hat{\beta}$ = 130° ; $\hat{\gamma}$ = 160°

8. Lean atentamente, calculen la medida de cada ángulo y clasifiquen el triángulo según sus ángulos.

En el triángulo abc, la medida del $\hat{b}$ es el doble de la medida del $\hat{a}$ y la medida del $\hat{c}$ es el triple de la del $\hat{a}$.

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180° \rightarrow \hat{a} + 2 . \hat{a} + 3 . \hat{a} = 180° \rightarrow$

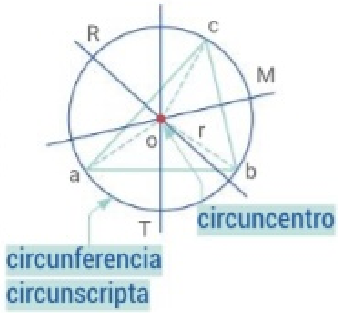
$6 . \hat{a} = 180° \rightarrow \hat{a} = 180° : 6 \rightarrow \hat{a} = 30°$

$\hat{a}$ = 30° ; $\hat{b}$ = 60° ; $\hat{c}$ = 90° ; Clasificación: Triángulo rectángulo.

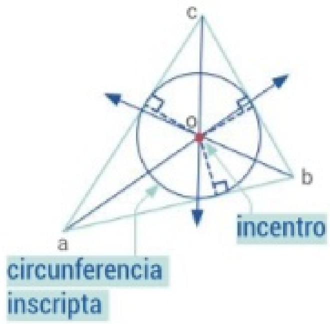
40. Puntos notables del triángulo

▶ SABERES DINÁMICOS

El **circuncentro** es el punto de intersección de las **mediatrices** de un triángulo.
El circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscripta en el mismo.
Los segmento cuyos extremos son el circuncentro y uno de los vértices del triángulo son radios de la circunferencia.
La circunferencia circunscripta en un triángulo es la que pasa por los tres vértices.

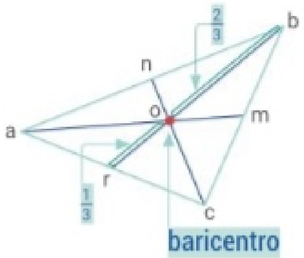


El **incentro** es el punto de intersección de las **bisectrices** de un triángulo.
El incentro de un triángulo es el centro de la circunferencia inscripta en el mismo.
Los segmentos perpendiculares a los lados, cuyos extremos son el incentro y un punto del lado, son radios de la circunferencia.
La circunferencia inscripta en un triángulo es tangente (toca en un punto) a cada uno de los lados del mismo.

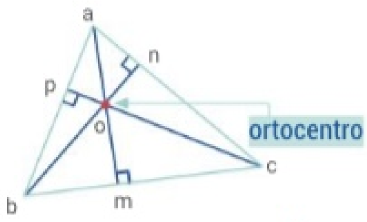


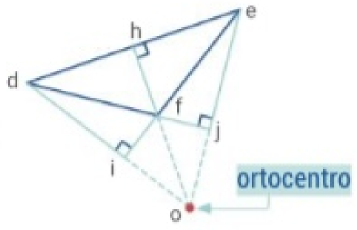
El **baricentro** es el punto de intersección de las **medianas** de un triángulo.
Hay que recordar que la mediana es un segmento que tiene por extremos el punto medio de uno de los lados y el vértice del ángulo opuesto a dicho lado.
La distancia del baricentro a cualquier vértice del triángulo es igual a los $\frac{2}{3}$ de la longitud total de la mediana correspondiente.

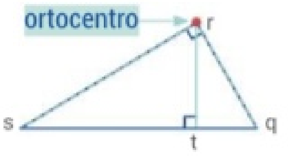
$\overline{ao} = \frac{2}{3}\,\overline{am}$ $\quad$ $\overline{bo} = \frac{2}{3}\,\overline{br}$ $\quad$ $\overline{co} = \frac{2}{3}\,\overline{cn}$



El **ortocentro** es el punto de intersección de las **alturas** de un triángulo.







Áreas dinámicas [Matemática y Físico-Química]

El baricentro es el centro de gravedad del triángulo, es decir, su punto de equilibrio.
Si tomamos como punto de apoyo de una superficie triangular su baricentro, esta se mantendrá en equilibrio.

TEST DE COMPRENSIÓN

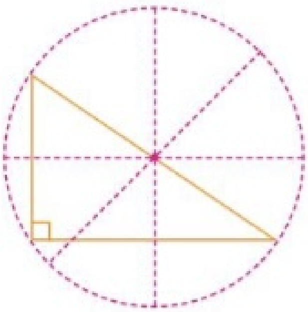
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. El incentro ¿equidista de los lados del triángulo? Sí.
   b. El baricentro ¿puede ser exterior al triángulo? No.
   c. Investiguen e indiquen qué sucede con los puntos notables en un triángulo equilátero. Coinciden los tres.

ApAp

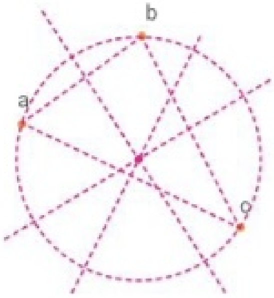
40. Puntos notables del triángulo

9. Realicen lo pedido en cada caso.

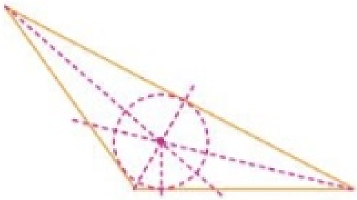
a. Hallen el circuncentro y tracen la circunferencia circunscripta.



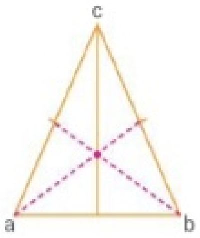
d. Tracen la circunferencia que contiene a los puntos a, b y c.



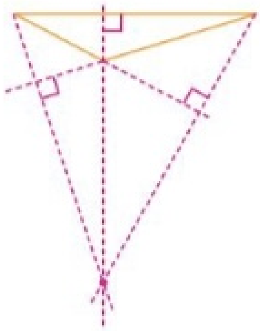
b. Hallen el incentro y tracen la circunferencia inscripta.



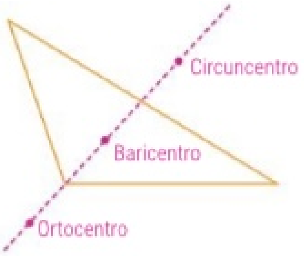
e. Ubiquen el baricentro del triángulo isósceles abc. Utilizando el mismo, tracen las medianas del triángulo.



c. Hallen el ortocentro.



f. Ubiquen el ortocentro, el baricentro y el circuncentro.



10. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas en la carpeta.

a. El ortocentro en un triángulo obtusángulo es un punto interior del triángulo. F

b. El circuncentro equidista siempre de los vértices del triángulo. V

c. La distancia del baricentro a uno de los vértices de un triángulo es de 6 cm.
La longitud de la mediana correspondiente al lado opuesto de ese vértice es de 9 cm. V

d. El baricentro es el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo. F

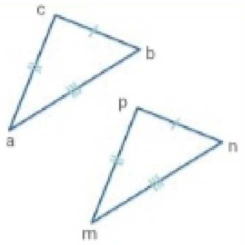
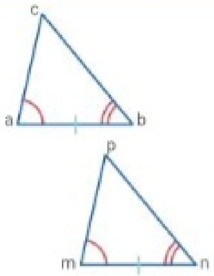
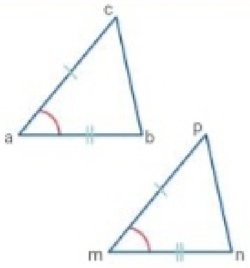
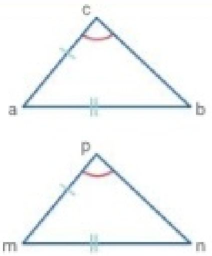
e. Los puntos notables de un triángulo a veces coinciden. V

41. Criterios de congruencia

▶ SABERES DINÁMICOS

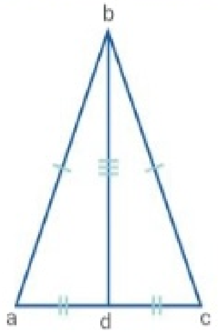
Dos **triángulos** son **congruentes** cuando tienen sus tres lados y sus tres ángulos interiores respectivamente congruentes. Cuando se superponen dos triángulos congruentes, estos coinciden en todos sus puntos.

• Para demostrar si dos triángulos son congruentes, no es necesario comparar todos sus lados y sus ángulos interiores. Existen criterios que permiten asegurar la congruencia teniendo en cuenta algunos de esos elementos.

Condiciones para que dos triángulos sean congruentes			
			
Tienen los tres lados respectivamente congruentes (LLL): $\overline{ab} \cong \overline{mn}$; $\overline{bc} \cong \overline{np}$; $\overline{ac} \cong \overline{mp}$	Tienen un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente congruentes (ALA): $\overline{ab} \cong \overline{mn}$; $\hat{a} \cong \hat{m}$; $\hat{b} \cong \hat{n}$	Tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes (LAL): $\overline{ab} \cong \overline{mn}$; $\overline{ac} \cong \overline{mp}$; $\hat{a} \cong \hat{m}$	Tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos respectivamente congruentes (LLA): $\overline{ab} \cong \overline{mn}$; $\overline{ac} \cong \overline{mp}$; $\hat{c} \cong \hat{p}$.

$\overset{\triangle}{abc}$ es isósceles.

$\overline{bd}$ es la mediatriz correspondiente a $\overline{ac}$.



$\overset{\triangle}{abd}$ y $\overset{\triangle}{bdc}$ $\left[\begin{array}{l} \overline{ab} \cong \overline{bc} \text{ (lados del triángulo isósceles)} \\ \overline{ad} \cong \overline{dc} \text{ (por ser "d" punto medio de } \overline{ac}\text{)} \\ \overline{bd} \cong \overline{bd} \text{ (lado común)} \end{array}\right.$

$\overset{\triangle}{abd} \cong \overset{\triangle}{bdc}$ por tener los tres lados respectivamente congruentes.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Dos triángulos que tienen sus ángulos respectivos congruentes ¿son necesariamente congruentes?
   b. ¿Es cierto que la diagonal de un cuadrado determina dos triángulos congruentes?
   ApAp c. ¿Qué criterio usarían para demostrar que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo isósceles determina dos triángulos congruentes?

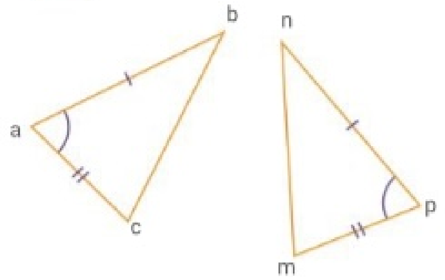
a. No necesariamente.
b. Sí, es cierto.
d. LAL (dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes)

ACTIVIDADES

41. Criterios de congruencia

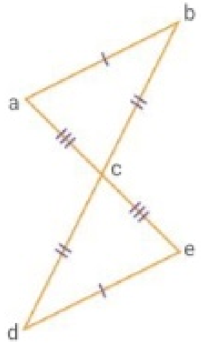
11. Marquen con una X los pares de triángulos congruentes. Expliquen el criterio utilizado.

a. [X]



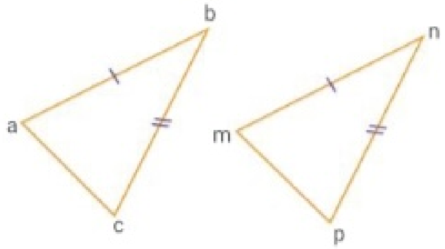
LAL

c. [X]



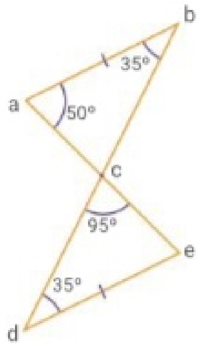
LLL

b. [ ]



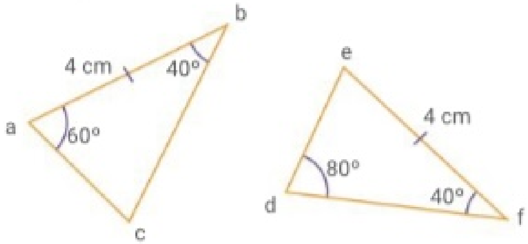
Faltan datos para poder determinar que sean congruentes.

d. [X]



ALA

12. Observen los siguientes triángulos. Demuestren que son congruentes. Luego, completen la tabla con los elementos respectivamente congruentes.



$\overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{def}$ porque Tienen un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente congruentes.

$\overset{\triangle}{abc}$	$\overline{ab}$	$\overline{bc}$	$\overline{ac}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$
$\overset{\triangle}{def}$	$\overline{ef}$	$\overline{df}$	$\overline{de}$	$\hat{e}$	$\hat{f}$	$\hat{d}$

41. Criterios de congruencia

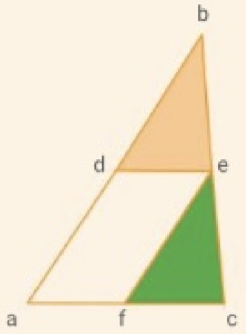
TracO

13. **Reúnanse con un compañero y demuestren la congruencia de los triángulos sombreados en cada caso usando los criterios correspondientes.**

a. $\overline{ab} \parallel \overline{fe}$

d es el punto medio de $\overline{ab}$.

e es el punto medio de $\overline{bc}$.



$\overline{be} \cong \overline{ec}$ por punto medio

$\hat{b} \cong \hat{e}$ por ser correspondientes entre paralelas

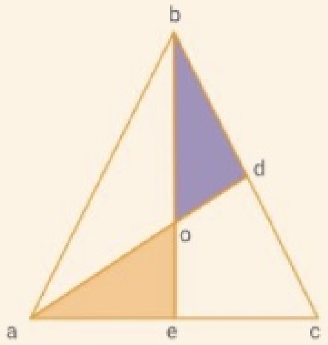
$\overline{bd} \cong \overline{ef}$ por punto medio

Se demuestra por el criterio LAL.

b. abc triángulo equilátero.

$\overline{be}$ es la altura correspondiente a $\overline{ac}$.

$\overline{ad}$ es la altura correspondiente a $\overline{bc}$.



$\hat{d} \cong \hat{e}$ por ser rectos

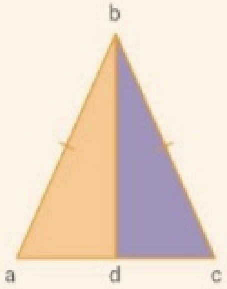
$\overline{bd} \cong \overline{ea}$ por punto medio ya que altura, mediana y mediatriz coinciden

$\hat{b} \cong \hat{a} = 30°$ por ser bisectriz

Se demuestra por el criterio ALA.

c. abc triángulo isósceles.

$\overline{bd}$ es la bisectriz de $\hat{b}$.



$\overline{ab} \cong \overline{bc}$ por ser lados de un triángulos isósceles

$a\hat{d}b \cong c\hat{d}b$ de por ser rectos

$\overline{bd} \cong \overline{bd}$ por ser lado en común

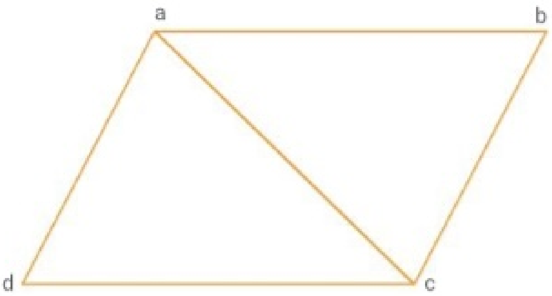
Se demuestra por el criterio LAL.

41. Criterios de congruencia

14. Resuelvan.

a. Demuestren utilizando el criterio ALA (un lado y los ángulos adyacentes a ese lado) que $a\overset{\triangle}{b}c \cong a\overset{\triangle}{d}c$.

$\overline{ab} \parallel \overline{cd}$ y $\overline{ad} \parallel \overline{bc}$



$\overline{ac} \cong \overline{ac}$ por lado en común

$c\hat{a}d \cong a\hat{c}b$ por ser alternos internos entre paralelas

$d\hat{c}a \cong b\hat{a}c$ por ser alternos internos entre paralelas

b. Tengan en cuenta los siguientes datos relacionados con la figura anterior y calculen lo pedido.

$\overline{ab} = 3x - 1$ cm; $\overline{dc} = 2x + 2$ cm; $\overline{ad} = 2y + 1$ cm; $\overline{bc} = y + 3$ cm

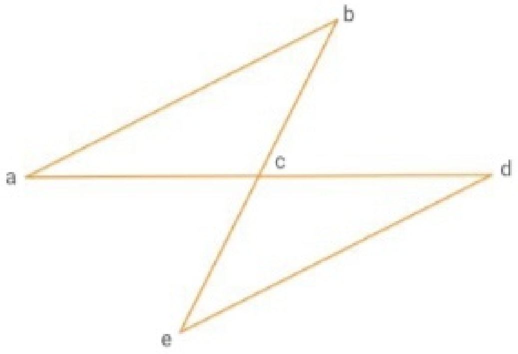
$\overline{ab} \rightarrow \overline{dc} \rightarrow 3x - 1\text{ cm} = 2x + 2\text{ cm} \rightarrow 3x - 2x = 2\text{ cm} + 1\text{ cm} \rightarrow x = 3\text{ cm}$

$\overline{ad} \rightarrow \overline{bc} \rightarrow 2y + 1\text{ cm} = y + 3\text{ cm} \rightarrow 2y - y = 3\text{ cm} - 1\text{ cm} \rightarrow y = 2\text{ cm}$

x = 3 cm; y = 2 cm; $\overline{ab}$ = 8 cm; $\overline{dc}$ = 8 cm; $\overline{ad}$ = 5 cm; $\overline{bc}$ = 5 cm; perímetro abcd = 26 cm

15. Observen el gráfico y los datos. Luego, resuelvan.

$\overline{ab} \parallel \overline{de}$; c es el punto medio de $\overline{ad}$ y de $\overline{be}$.



a. Demuestren que $a\overset{\triangle}{b}c \cong c\overset{\triangle}{e}d$.

$\overline{bc} \cong \overline{ce}$, por punto medio

$\hat{c} \cong \hat{c}$ por opuestos por el vértice

$\overline{ac} \cong \overline{cd}$, por punto medio

Se demuestra por el criterio LAL.

b. Calculen lo pedido teniendo en cuenta que $a\hat{c}b = 2x + 30^{\circ}\ 10'$ y $e\hat{c}d = x + 50^{\circ}\ 20'$.

$a\hat{c}b \cong e\hat{c}d \rightarrow 2x + 30^{\circ}\ 10' = x + 50^{\circ}\ 20' \rightarrow 2x - x = 50^{\circ}\ 20' - 30^{\circ}\ 10' \rightarrow x = 20^{\circ}\ 10'$

$a\hat{c}b = 2 \cdot 20^{\circ}\ 10' + 30^{\circ}\ 10' = 40^{\circ}\ 20' + 30^{\circ}\ 10' = 70^{\circ}\ 30'$

$e\hat{c}d = 20^{\circ}\ 10' + 50^{\circ}\ 20' = 70^{\circ}\ 30'$

x = 20° 10'; $a\hat{c}b$ = 70° 30'; $e\hat{c}d$ = 70° 30'

42. Construcción de triángulos

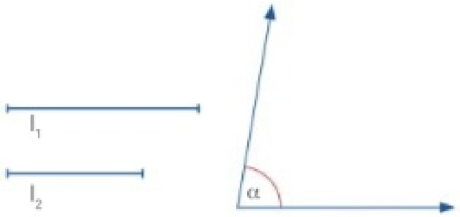
▶ SABERES DINÁMICOS

Para **construir un único triángulo**, se deben conocer:

- sus tres lados;
- un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado;
- dos lados y el ángulo comprendido entre ellos; o
- dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

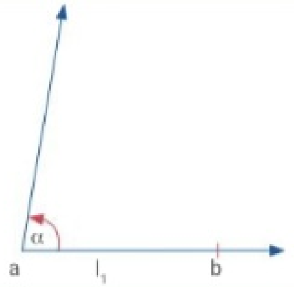
Si en uno de estos casos falta alguno de los datos, se pueden construir distintos triángulos.

Construyan un triángulo conociendo la medida de dos de sus lados y el ángulo comprendido.

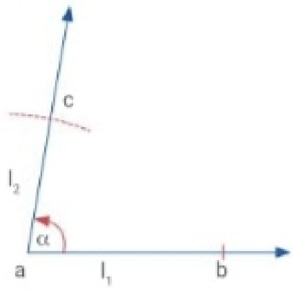


1. Sobre una semirrecta de origen a, se traslada la medida de uno de los lados. Queda determinado el punto b.

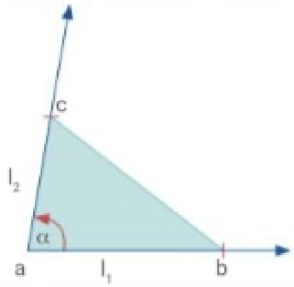
2. Se construye un ángulo congruente con $\hat{\alpha}$ que tenga centro en a y lado ab.



3. Haciendo centro en a, se transporta la medida del otro lado sobre el lado del ángulo construido. Queda determinado el punto c.



4. Uniendo b con c queda determinado el triángulo abc.



TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir conociendo la medida de dos lados y del perímetro?
   b. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir conociendo la medida de los tres ángulos exteriores?
   c. ¿Cuántos triángulos isósceles se pueden construir con un lado de 7 cm y otro de 6 cm? ¿Y si uno mide 3 cm y el otro, 8 cm?

ApAp

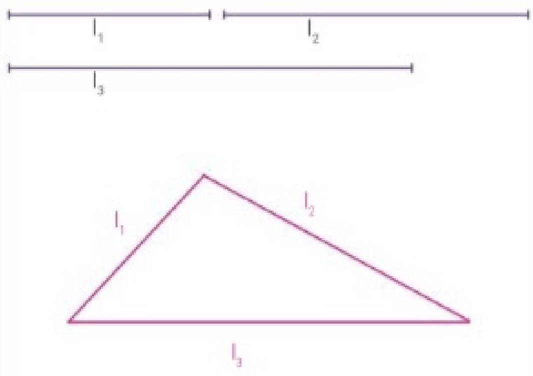
a. Uno.
b. Infinitos.
c. Dos triángulos (7 cm; 7 cm y 6 cm o 6 cm, 6 cm y 7 cm). Uno (8 cm, 8 cm y 3 cm).

ACTIVIDADES

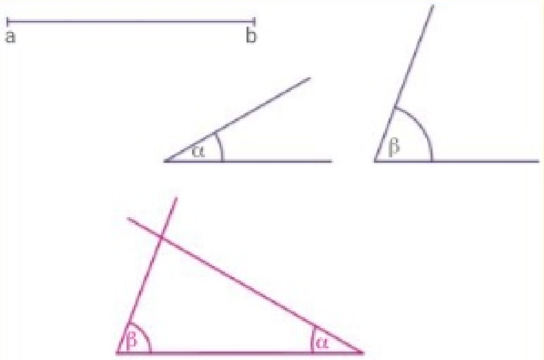
42. Construcción de triángulos

16. **Construyan los triángulos con los datos que se indican en cada caso.**

a. Conociendo los tres lados.



b. Conociendo un lado y los ángulos adyacentes.

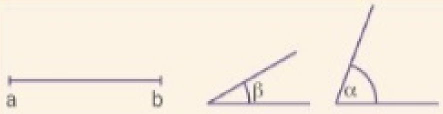


Comu **17.** **Construyan un ángulo de 60° sin usar transportador. Expliquen el procedimiento utilizado.**

Construcción a cargo del alumno.

1. Se traza un segmento.
2. Con el compás se traza un arco de circunferencia con centro en un extremos del segmento y con una abertura igual al segmento trazado.
3. Se traza otro arco igual, pero con centro en el otro extremo del segmento.
4. Se unen los extremos del segmento con el punto de intersección de los dos arcos de circunferencia.
5. Queda determinado un triángulo equilátero.

TracO **18.** **Reúnanse en grupos, construyan un triángulo conociendo un lado, un ángulo adyacente y el ángulo opuesto al lado dado. Luego, indiquen cuántos triángulos distintos se pueden construir.**



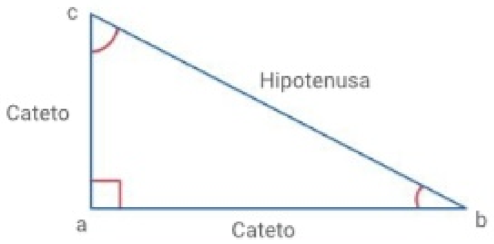
Construcción a cargo del alumno.

Se pueden construir dos triángulos.

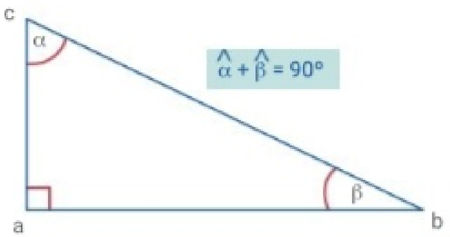
43. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras

▶ SABERES DINÁMICOS

En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**. El lado opuesto al ángulo recto recibe el nombre de **hipotenusa**.

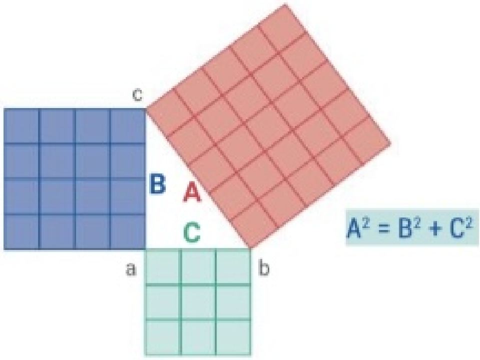


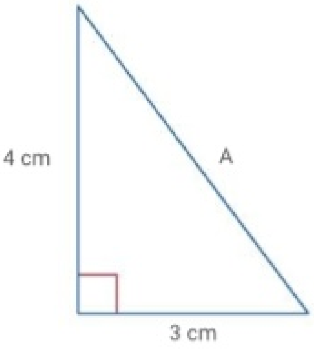
La suma de los ángulos agudos interiores de un triángulo rectángulo es igual a 90°, es decir, son complementarios.



Propiedad pitagórica

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.





$A^2 = (4\ cm)^2 + (3\ cm)^2$

$A^2 = 16\ cm^2 + 9\ cm^2$

$A^2 = 25\ cm^2$

$A = \sqrt{25\ cm^2}$

$A = 5\ cm$

Áreas dinámicas [Matemática y Prácticas del lenguaje]

El caligrama es un tipo de poesía visual cuyo propósito es formar una figura acerca de lo que trata el poema. El siguiente es una adaptación del poema visual sobre el teorema de Pitágoras del ingeniero químico estadounidense Li C. Tien, titulado *"Right triangle"*.

43. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras

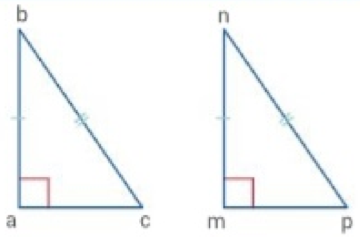
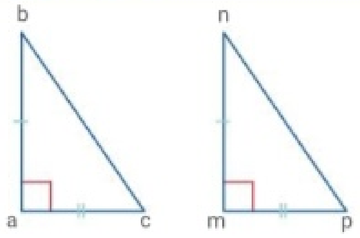
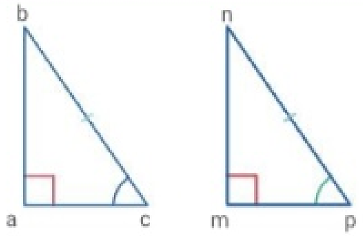
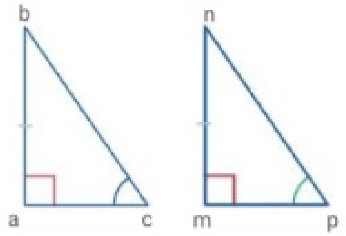
▶ SABERES DINÁMICOS

Criterios de congruencia

Como se explicó en la página 155, dos **triángulos** son **congruentes** cuando tienen sus tres lados y sus tres ángulos interiores respectivamente congruentes.
Los criterios que permiten asegurar la congruencia teniendo en cuenta sus elementos son:

- Tienen los tres lados respectivamente congruentes (LLL).
- Tienen un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente congruentes (ALA).
- Tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes (LAL).
- Tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos respectivamente congruentes (LLA).

En el caso de los **triángulos rectángulos**, como ya se conoce la medida de un ángulo (el ángulo recto), los criterios se pueden enunciar de la siguiente manera:

Criterios de congruencia de triángulos rectángulos	
 Tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente congruentes. $\overline{bc} \cong \overline{np}$; $\overline{ab} \cong \overline{mn}$	 Tienen los dos catetos respectivamente congruentes. $\overline{ab} \cong \overline{mn}$; $\overline{ac} \cong \overline{mp}$
 Tienen la hipotenusa y uno cualquiera de sus ángulos agudos respectivamente congruentes. $\overline{bc} \cong \overline{np}$; $\hat{c} \cong \hat{p}$	 Tienen un cateto y uno cualquiera de sus ángulos agudos respectivamente congruentes. $\overline{ab} \cong \overline{mn}$; $\hat{c} \cong \hat{p}$

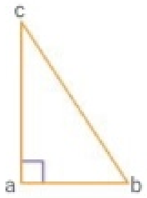
a. Sí, ya que $10^2 = 6^2 + 8^2$
b. 45°
c. Dos (5 cm, 4 cm y 3 cm o 4 cm, 3 cm y $\sqrt{7}$ cm).

TEST DE COMPRENSIÓN

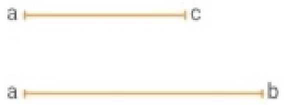
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si los lados de un triángulo miden 6 cm, 8 cm y 10 cm, ¿es un triángulo rectángulo?
   b. ¿Cuál es la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles?
   ApAp c. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden construir sabiendo que la medida de uno de sus lados es de 4 cm y la medida de otro de sus lados es de 3 cm?

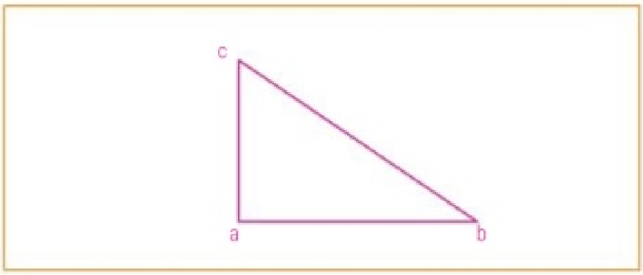
43. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras

19. Construyan en cada caso el triángulo rectángulo abc. Oriéntense con la siguiente figura de análisis.

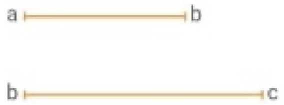


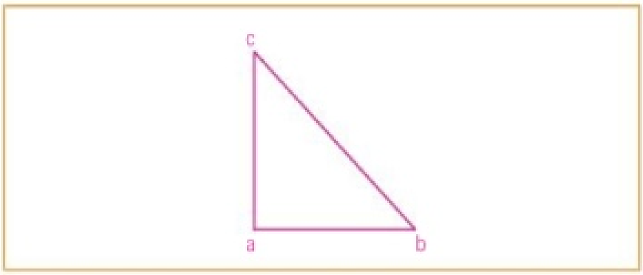
a.



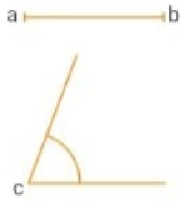


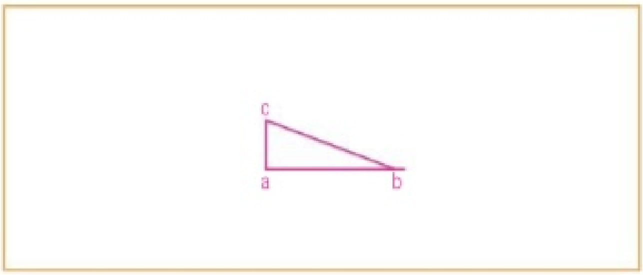
b.





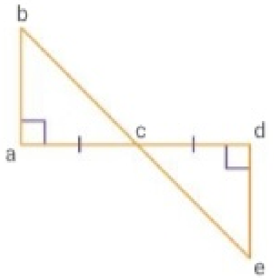
c.





20. Demuestren que los triángulos rectángulos abc y cde son congruentes.

a.



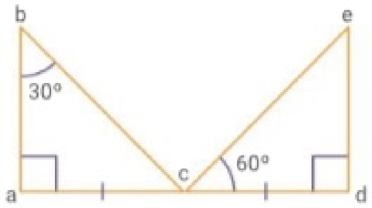
Son congruentes por criterio ALA.

$a\hat{c}b \cong d\hat{c}e$ por opuestos por el vértice

$\overline{ac} \cong \overline{cd}$ por dato de la imagen

$\hat{a} \cong \hat{d}$ por ángulos rectos

b.



Son congruentes por criterio ALA.

$\hat{a} \cong \hat{d}$ por ángulos rectos

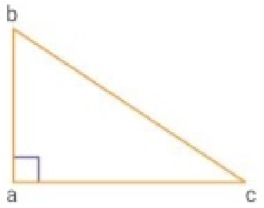
$\overline{ac} \cong \overline{cd}$ por dato de la imagen

$a\hat{c}b \cong d\hat{c}e$ porque miden 60°

43. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras

21. Calculen el valor aproximado del lado pedido en cada caso.

a. $\overline{ab}$ = 5 cm; $\overline{ac}$ = 7 cm



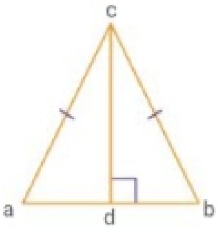
$\overline{bc}$ = 8,6 cm

$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 \rightarrow \overline{bc}^2 = (5\text{ cm})^2 + (7\text{ cm})^2$

$\rightarrow \overline{bc} = \sqrt{25\text{ cm}^2 + 49\text{ cm}^2} \rightarrow \overline{bc} = \sqrt{74\text{ cm}^2} \rightarrow \overline{bc} = 8{,}6\text{ cm}$

c. abc triángulo isósceles.

$\overline{ab}$ = 6 cm; $\overline{cd}$ = 4 cm

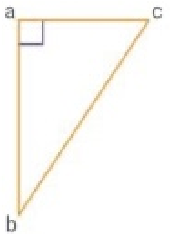


$\overline{ac}$ = 5 cm

$\overline{ac}^2 = (\overline{ab}/2)^2 + \overline{cd}^2 \rightarrow \overline{ac}^2 = (3\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2$

$\rightarrow \overline{ac} = \sqrt{9\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2} \rightarrow \overline{ac} = \sqrt{25\text{ cm}^2} \rightarrow \overline{ac} = 5\text{ cm}$

b. $\overline{bc}$ = 6 cm; $\overline{ac}$ = 3 cm



$\overline{ab}$ = 5,2 cm

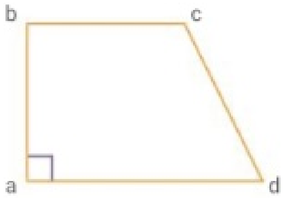
$\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 - \overline{ac}^2 \rightarrow \overline{ab}^2 = (6\text{ cm})^2 - (3\text{ cm})^2$

$\rightarrow \overline{ab} = \sqrt{36\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2} \rightarrow \overline{ab} = \sqrt{27\text{ cm}^2} \rightarrow \overline{ab} = 5{,}2\text{ cm}$

d. $\overline{ad}$ = 6 cm;

$\overline{ab}$ = 3 cm;

$\overline{bc}$ = 4 cm



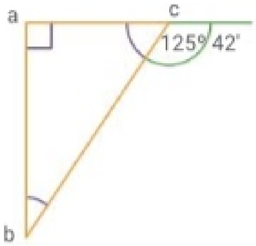
$\overline{dc}$ = 3,6 cm

$\overline{dc}^2 = \overline{ab}^2 + (\overline{ad} - \overline{bc})^2 \rightarrow \overline{dc}^2 = (3\text{ cm})^2 + (2\text{ cm})^2$

$\rightarrow \overline{dc} = \sqrt{9\text{ cm}^2 + 4\text{ cm}^2} \rightarrow \overline{dc} = \sqrt{13\text{ cm}^2} \rightarrow \overline{dc} = 3{,}6\text{ cm}$

22. Calculen el valor de los ángulos pedidos en cada caso.

a.

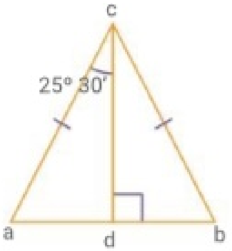


$\hat{c} = 180° - 125° 42' = 54° 18'$

$\hat{b} = 180° - 90° - 54° 18' = 35° 42'$

$\hat{b}$ = 35° 42' ; $\hat{c}$ = 54° 18'

b.



$\hat{a} = 180° - 90° - 25° 30' = 64° 30'$

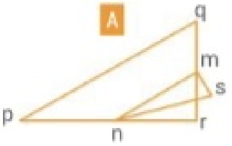
$\hat{b} = \hat{a} = 64° 30'$

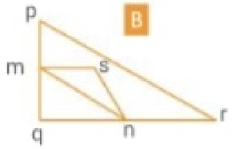
$\hat{c} = 2 \,.\, 25° 30' = 51°$

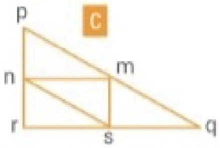
$\hat{a}$ = 64° 30' ; $\hat{b}$ = 64° 30' ; $\hat{c}$ = 51°

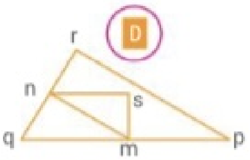
23. Rodeen con un círculo la letra de la figura que se ajusta a la siguiente descripción.

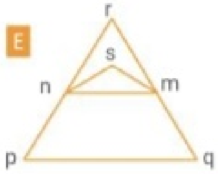
- El triángulo pqr es un triángulo rectángulo con $\hat{r}$ como ángulo recto.
- "m" es el punto medio de $\overline{pq}$ y "n" es el punto medio de $\overline{qr}$.
- "s" es un punto del interior del triángulo pqr.
- $\overline{rq} < \overline{pr}$
- $\overline{mn} > \overline{ms}$

A


B


C


D (rodeada)


E


24. **Indiquen en cada caso si es posible construir el triángulo abc.**

a. $\overline{ab}$ = 5 cm; $\overline{bc}$ = 4 cm; $\overline{ac}$ = 7 cm Sí.

b. $\overline{ab}$ = 3 cm; $\overline{bc}$ = 5 cm; $\overline{ac}$ = 1 cm No.

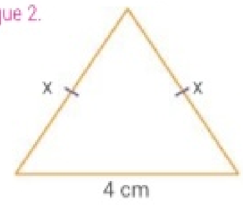
c. $\overline{ab}$ = 6 cm; $\overline{bc}$ = 4 cm; $\overline{ac}$ = 2 cm No.

d. $\hat{a}$ =75°; $\hat{b}$ = 30°; $\hat{c}$ = 75° Sí.

e. $\hat{a}$ = 60° 20'; $\hat{b}$ = 50° 40'; $\hat{c}$ = 68° 60' Sí.

25. **Indiquen qué condición debe cumplir x para que se pueda formar el triángulo.**

x debe ser mayor que 2.



26. **Realicen lo pedido en cada caso.**

a. Construyan el triángulo abc.

$\overline{ab}$ = 5 cm; $\overline{ac}$ = 4 cm; $\hat{a}$ = 100°

A cargo del alumno.

b. Clasifiquen el triángulo según sus lados y según sus ángulos.

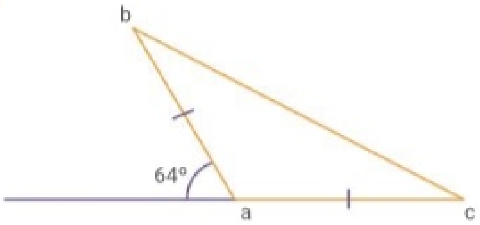
Escaleno y obtusángulo.

c. Hallen el ortocentro.

A cargo del alumno.

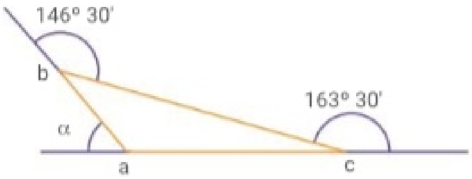
27. **Calculen el valor de los ángulos pedidos.**

a.



$\hat{a}$ = 116° ; $\hat{b}$ = 32° ; $\hat{c}$ = 32°

b.



$\hat{a}$ = 130° ; $\hat{b}$ = 33° 30' ; $\hat{c}$ = 16° 30' ; $\hat{\alpha}$ = 50°

28. **Reúnanse en grupos y demuestren que los triángulos acd y ace son congruentes.** TracO

abc triángulo isósceles;

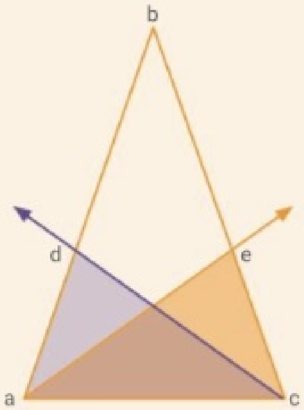
$\overrightarrow{ae}$ es la bisectriz de $\hat{a}$; $\overrightarrow{cd}$ es la bisectriz de $\hat{c}$.

Criterio: ALA

$\overline{ac} = \overline{ac}$

$\widehat{acd} = \widehat{cae}$

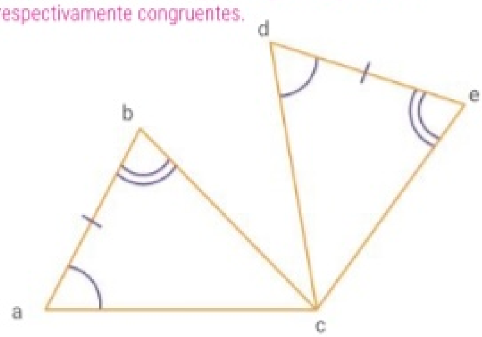
$\widehat{eac} = \widehat{dca}$



29. **Realicen lo pedido en cada caso.**

a. Indiquen si $\overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{cde}$.

Sí, porque tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente congruentes.



b. Completen la tabla.

$\overset{\triangle}{abc}$	$\overset{\triangle}{cde}$
$\overline{ab}$	$\overline{de}$
$\overline{bc}$	$\overline{ec}$
$\overline{ac}$	$\overline{cd}$
$\hat{a}$	$\hat{d}$
$\hat{b}$	$\hat{e}$
$\widehat{acb}$	$\widehat{dce}$

30. **Calculen la medida de la diagonal de un cuadrado de 5 cm de lado.** $\sqrt{50}$ cm

31. **Calculen la medida del lado de un cuadrado sabiendo que la medida de la diagonal es $\sqrt{2}$ cm.**
1 cm.

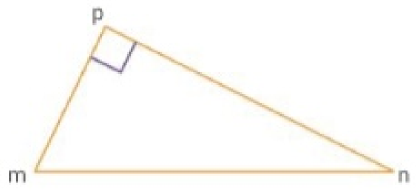
32. **Construyan un triángulo rectángulo teniendo en cuenta los datos en cada caso.** A cargo del alumno.

a. La medida de un cateto es 4 cm y la medida de la hipotenusa es 5 cm.

b. La medida de un cateto es 3 cm y la medida del ángulo que ese cateto forma con la hipotenusa es de 35°.

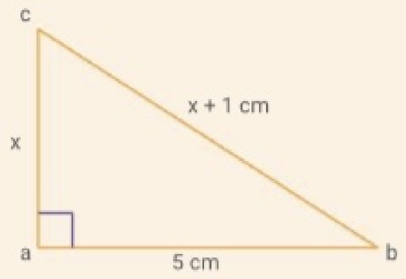
33. **Calculen el valor de x y de los ángulos del triángulo rectángulo mnp.**

$\hat{m} = 2x + 30°$; $\hat{n} = 3x + 20°$



x = 8° ; $\hat{m}$ = 46° ; $\hat{n}$ = 44°

TracO **34.** **Reúnanse con un compañero, hallen el valor de x y de los lados desconocidos.**



x = 12 cm ; $\overline{ac}$ = 12 cm ; $\overline{bc}$ = 13 cm

35. **Indiquen si es posible formar un triángulo rectángulo con las siguientes medidas.**

a. 5 cm; 8 cm; 10 cm   No.

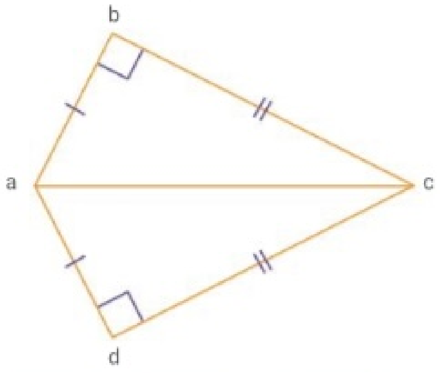
b. 1 cm; 1 cm; $\sqrt{2}$ cm   Sí.

c. 3 cm; 6 cm; 4 cm   No.

36. **Calculen los valores pedidos.**

$\overline{ab} = 3x - 4$ cm; $\overline{bc} = 2y + 1$ cm

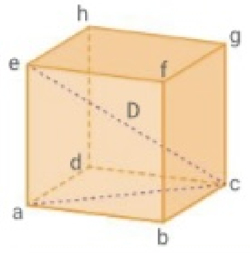
$\overline{ad} = 2x - 1$ cm; $\overline{cd} = y + 5$ cm



x = 3 cm ; y = 4 cm ; $\overline{ab}$ = 5 cm ;

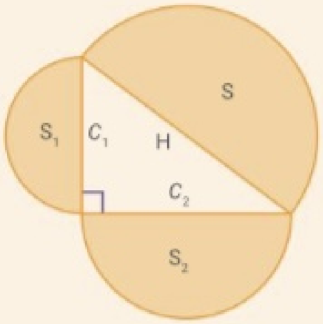
$\overline{bc}$ = 9 cm ; $\overline{cd}$ = 9 cm ; $\overline{ad}$ = 5 cm

37. **Calculen la medida de la diagonal ce de un cubo de 4 cm de arista.** Diagonal: $\sqrt{48}$ cm



38. **Reúnanse en grupos y resuelvan.** TracO

$C_1 = 3$ cm; $C_2 = 4$ cm; área del círculo = πr^2



a. Calculen la medida de la hipotenusa (H).
Hipotenusa: 5 cm

b. Comprueben que:

Área S = Área S_1 + Área S_2

$[\pi . (2,5 \text{ cm})^2]/2 = [\pi . (2 \text{ cm})^2] + [\pi . (1,5 \text{ cm})^2]$

$(\pi . 6,25 \text{ cm}^2)/2 = (\pi . 4 \text{ cm}^2/2) + (\pi . 2,25 \text{ cm}^2/2)$

$9,81 \text{ cm}^2 = 9,81 \text{ cm}^2$

44. Paralelogramos. Construcciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **paralelogramo** a todo cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.
En todo cuadrilátero, la suma de los ángulos interiores es de 360°.

PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

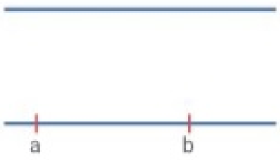
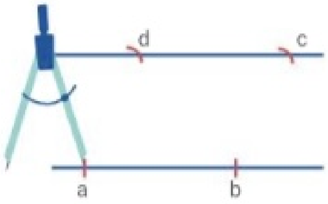
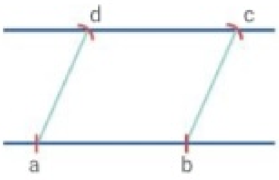
PARALELOGRAMOS (EN GENERAL)
- Los lados opuestos son congruentes.
- Los ángulos opuestos son congruentes.
- Las diagonales se cortan mutuamente en su punto medio.

RECTÁNGULOS
- Cumplen las tres propiedades anteriores.
- Tienen cuatro ángulos rectos.
- Las diagonales son congruentes.

ROMBOS
- Cumplen las tres propiedades anteriores.
- Tienen cuatro lados congruentes.
- Las diagonales son perpendiculares.

CUADRADOS
- Cumplen todas las propiedades anteriores.

Para **construir un paralelogramo propiamente dicho** con regla, escuadra y compás, pueden seguir estos pasos:

		
1. Se traza una recta y se determina sobre ella el lado $\overline{ab}$. Se traza una recta paralela a la primera.	2. Se pincha el compás sobre el punto "a" y se determina el punto "d" sobre la recta paralela. Con la misma abertura se pincha el compás en "b" y se determina "c".	3. Se trazan los segmentos $\overline{ad}$ y $\overline{bc}$ para formar el paralelogramo.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Las diagonales del paralelogramo ¿son siempre congruentes?
   b. Si la medida de un ángulo de un paralelogramo es de 50°, ¿cuál es la medida del resto de los ángulos?
   ApAp c. Demuestren que las diagonales del rectángulo son congruentes.

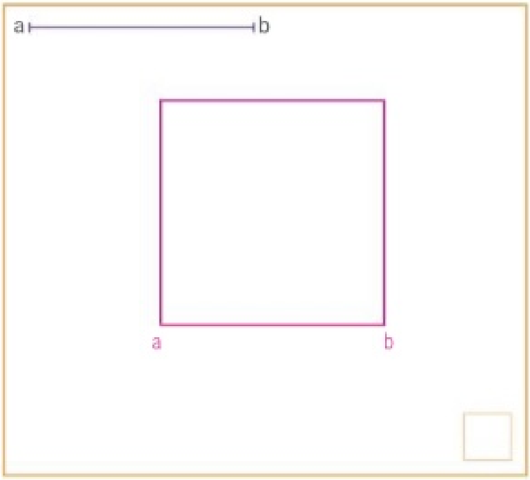
a. No.
b. 130°; 130°; 50°
c. Las diagonales del rectángulo son congruentes porque los triángulos rectángulos tienen los catetos respectivamente congruentes.

ACTIVIDADES

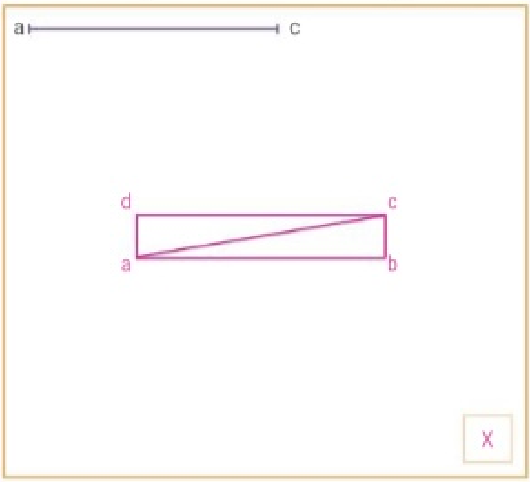
44. Paralelogramos. Construcciones

39. Realicen las siguientes construcciones con los datos disponibles. Marquen con una X en el caso que sea posible construir más de uno.

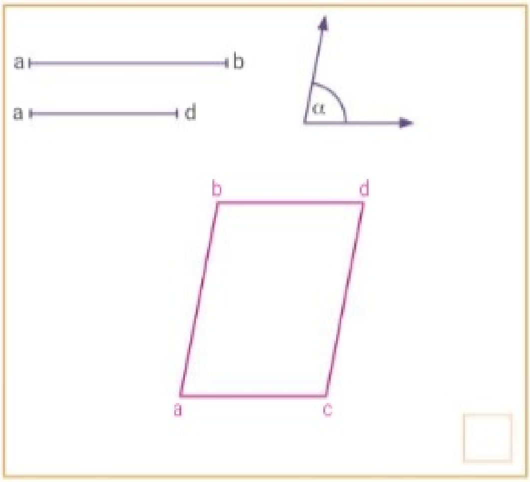
a. Un cuadrado conociendo un lado.



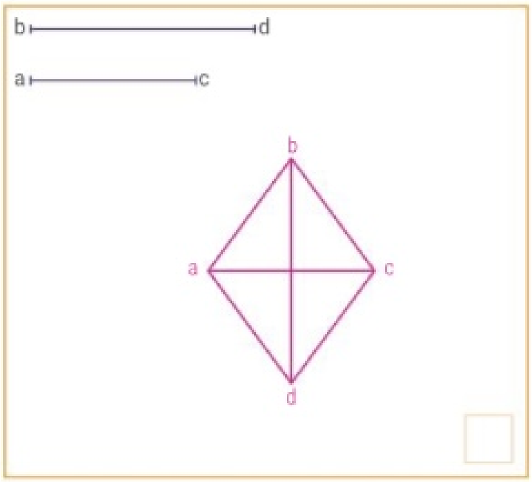
b. Un rectángulo conociendo la diagonal.



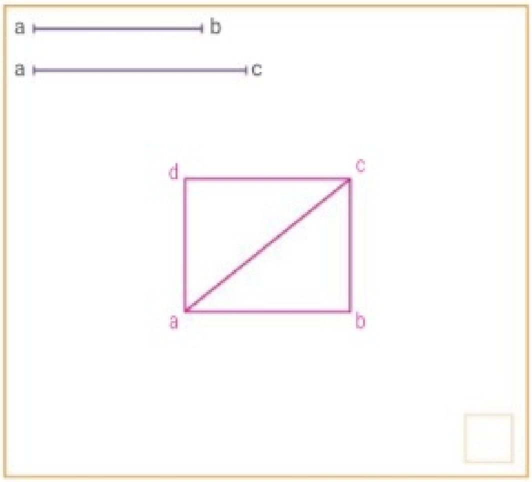
c. Un paralelogramo conociendo dos lados consecutivos y el ángulo comprendido.



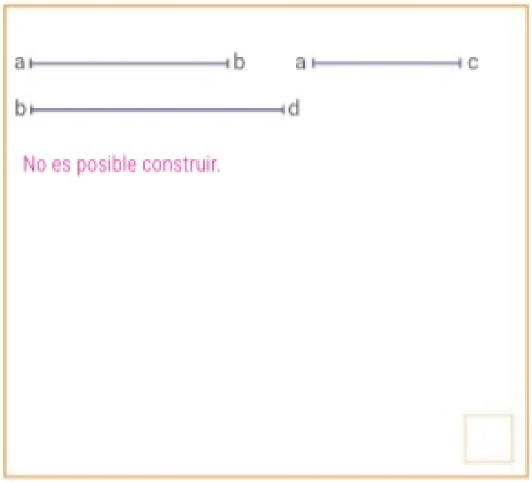
d. Un rombo conociendo las diagonales.



e. Un rectángulo conociendo el lado $\overline{ab}$ y la diagonal $\overline{ac}$.



f. Un paralelogramo conociendo las diagonales $\overline{ac}$ y $\overline{bd}$ y la base $\overline{ab}$.

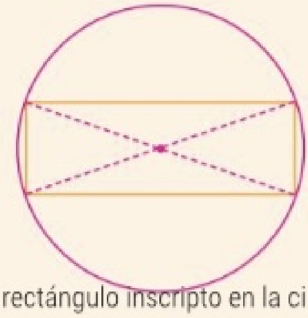


44. Paralelogramos. Construcciones

TracO
Comu

40. Reúnanse con un compañero y construyan lo pedido en cada caso. Expliquen cada procedimiento y marquen con una X en el caso que sea posible construir más de uno.

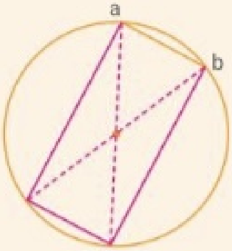
a. Una circunferencia circunscripta al rectángulo.



Se trazan las diagonales del rectángulo. El punto de intersección es el centro de la circunferencia circunscripta. Con eje en ese centro se traza la circunferencia que pase por todos los vértices (que están a la misma distancia del centro).

☐

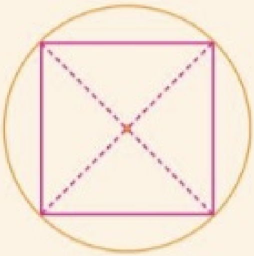
b. Un rectángulo inscripto en la circunferencia cuyo lado sea $\overline{ab}$.



Se traza el diámetro de la circunferencia que tiene por extremo al punto a y otro diámetro que tiene por extremo al punto b. Quedan determinados los otros dos puntos del rectángulo (los extremos de los diámetros trazados que no son ni a ni b). Se traza el rectángulo inscripto en la circunferencia.

☐

c. Un cuadrado inscripto en la circunferencia.



Se traza un diámetro de la circunferencia.
Se traza otro diámetro que sea perpendicular al anterior.
Quedan determinados los cuatro vértices del cuadrado.
Se traza el cuadrado inscripto en la circunferencia.

X

41. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a. Todo cuadrado es rombo y rectángulo. V

b. Los ángulos consecutivos del paralelogramo son complementarios. F

c. El rombo siempre tiene sus cuatro ángulos congruentes. F

d. Todo rombo es paralelogramo. V

e. Las rectas que contienen a las diagonales del rombo son perpendiculares. V

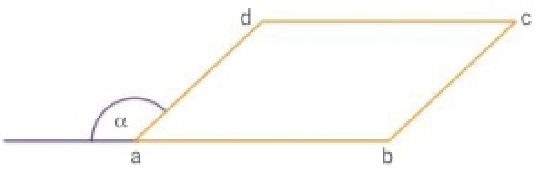
f. Las diagonales del paralelogramo se cortan mutuamente en su punto medio. V

g. Los ángulos opuestos del paralelogramo son congruentes. V

44. Paralelogramos. Construcciones

42. Calculen lo pedido en cada caso.

a. $\hat{\alpha} = 135° \, 20'$

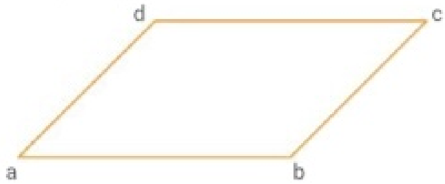


$\hat{a} = 180° - 135° \, 20' = 44° \, 40'$

$\hat{\alpha} = \hat{b} = 135° \, 20'$

$\hat{b} =$ 135° 20′ ; $\hat{c} =$ 44°40′ ; $\hat{d} =$ 135° 20′

b. $\overline{ab} = 7{,}5$ cm; perímetro abcd = 23 cm



Perímetro = $2 \cdot (\overline{bc} + \overline{ab}) \rightarrow 23 \text{ cm} = 2 \cdot (\overline{bc} + 7{,}5 \text{ cm})$

$\rightarrow 23 \text{ cm} : 2 = \overline{bc} + 7{,}5 \text{ cm} \rightarrow 11{,}5 \text{ cm} - 7{,}5 \text{ cm} = \overline{bc} \rightarrow 4 \text{ cm} = \overline{bc}$

$\overline{bc} =$ 4 cm ; $\overline{cd} =$ 7,5 cm ; $\overline{ad} =$ 4 cm

TracO

43. Reúnanse con un compañero y resuelvan.

a. Tengan en cuenta los datos y demuestren que mnpq es rombo.

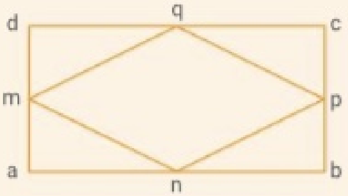
abcd es rectángulo.

"m" es punto medio de $\overline{ad}$.

"n" es punto medio de $\overline{ab}$.

"p" es punto medio de $\overline{bc}$.

"q" es punto medio de $\overline{cd}$.



Los cuatro triángulos son congruentes por tener los catetos respectivamente congruentes, por lo tanto las hipotenusas también lo son.

b. Calculen lo pedido sabiendo que $\overline{dq} = 2x + 2$ cm; $\overline{qc} = x + 3$ cm; $\overline{ad} = 6$ cm.

$\overline{dq} = \overline{qc} \rightarrow 2x + 2 \text{ cm} = x + 3 \text{ cm} \rightarrow 2x - x = 3 \text{ cm} - 2 \text{ cm} \rightarrow x = 1 \text{ cm}$

Per. abcd = $2 \cdot (\overline{dc} + \overline{ad}) = 2 \cdot (8 \text{ cm} + 6 \text{ cm}) = 28 \text{ cm}$

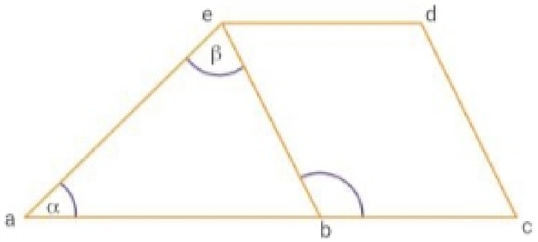
$\overline{mn}^2 = (3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2 \rightarrow \overline{mn} = 5 \text{ cm} \rightarrow$ Per. mnpq $= 4 \cdot \overline{mn} = 4 \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$

x = 1 cm ; perímetro abcd = 28 cm ; perímetro mnpq = 20 cm .

44. Tengan en cuenta los datos y calculen lo pedido.

bcde es paralelogramo.

$\hat{\alpha} = x + 30°$; $\hat{\beta} = 2x + 42°$; $\hat{b} = x + 102°$.



$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = e\hat{b}c \rightarrow x + 30° + 2x + 42° = x + 102° \rightarrow$

$x + 2x - x = 102° - 30° - 42° \rightarrow 2x = 30° \rightarrow x = 30° : 2 \rightarrow x = 15°$

$\hat{\alpha} = 15° + 30° = 45°$; $\hat{\beta} = 2 \cdot 15° + 42° = 72°$; $e\hat{b}c = 15° + 102° = 117°$

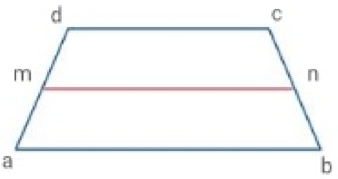
$\hat{c} = a\hat{b}c = 180° - 117° = 63°$; $\hat{d} = e\hat{b}c = 117°$

x = 15° ; $\hat{\alpha} =$ 45° ; $\hat{\beta} =$ 72° ; $e\hat{b}c =$ 117° ; $\hat{c} =$ 63° ; $\hat{d} =$ 117° ; $\hat{e} =$ 63°

45. Trapecios y romboides

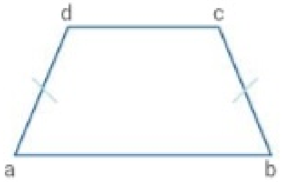
▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **trapecio** a todo cuadrilátero que tiene un solo par de lados paralelos.

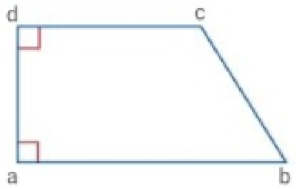


$\overline{ab} // \overline{dc}$
$\overline{ab}$ es la base mayor.
$\overline{dc}$ es la base menor.
$\overline{mn}$ es la base media del trapecio.

- La **base media** de un trapecio es paralela a las bases y su medida es igual a la mitad de la suma de las medidas de las bases.
- **Trapecio isósceles**: es el que tiene los dos lados no paralelos congruentes.

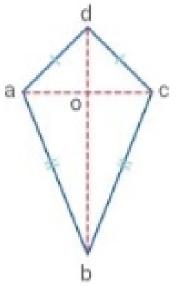


- **Trapecio rectángulo**: es el que tiene dos ángulos rectos.



Se denomina **trapezoide** a todo cuadrilátero que no tiene lados paralelos.

- Un **romboide** es un trapezoide que tiene dos pares de lados consecutivos congruentes.



$\overline{bd}$ es la diagonal principal. La diagonal principal de un romboide está incluida en la bisectriz de los ángulos cuyos vértices une (b y d). La diagonal principal de un romboide está incluida en una recta que es mediatriz de la otra diagonal.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Un ángulo de un trapecio isósceles mide 40° 30′: ¿cuál es la medida del resto de los ángulos?
   b. Los pares de ángulos opuestos del romboide ¿son congruentes?
   c. Si en un trapecio la base menor mide 5 cm y la base media, 6,5 cm, ¿cuál es la medida de la base mayor?

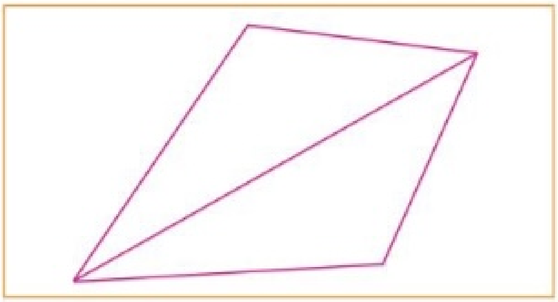
ApAp

a. 40° 30′; 139° 30′; 139° 30′
b. No, solo un par.
c. 8 cm

45. Trapecios y romboides

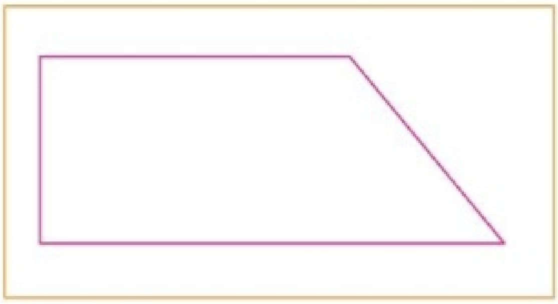
45. Construyan la figura pedida en cada caso. Indiquen cuántas figuras distintas se pueden construir.

a. Un romboide utilizando un lado de 3 cm, otro lado de 4 cm y la diagonal principal de 6 cm.



Un solo romboide.

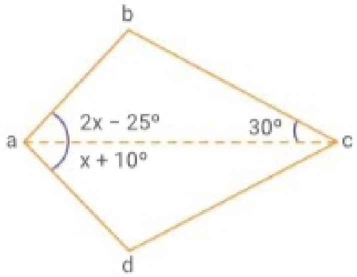
b. Un trapecio rectángulo utilizando una base de 6 cm y la otra de 4 cm.



Infinitos trapecios.

46. Calculen el valor de x y los valores pedidos en cada caso.

a. abcd romboide



$2x - 25° = x + 10° \rightarrow 2x - x = 10° + 25° \rightarrow x = 35°$

$\hat{a} = 2 \,.\, 35° - 25° + 35° + 10° = 90°$; $\hat{c} = 2 \,.\, 30° = 60°$

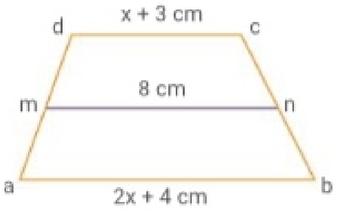
$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360° \rightarrow$

$90° + \hat{b} + 60° + \hat{b} = 360° \rightarrow 2 \,.\, \hat{b} = 360° - 90° - 60°$

$\rightarrow \hat{b} = 210° : 2 \rightarrow \hat{b} = 105° \rightarrow \hat{d} = 105°$

$x =$ 35°; $\hat{a} =$ 90°; $\hat{b} =$ 105°; $\hat{c} =$ 60°; $\hat{d} =$ 105°

b. $\overline{mn}$ base media del trapecio.



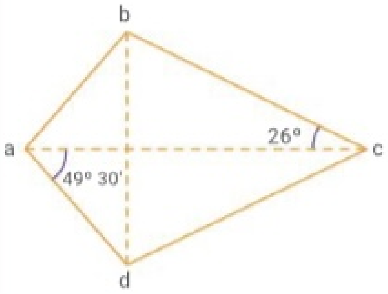
$(x + 3 \text{ cm} + 2x + 4 \text{ cm}) : 2 = 8 \text{ cm} \rightarrow 3x + 7 \text{ cm} = 8 \text{ cm} \,.\, 2 \rightarrow$

$3x = 16 \text{ cm} - 7 \text{ cm} \rightarrow x = 9 \text{ cm} : 3 \rightarrow x = 3 \text{ cm}$

$\overline{ab} = 2 \,.\, 3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$; $\overline{cd} = 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$

$x =$ 3 cm; $\overline{ab} =$ 10 cm; $\overline{cd} =$ 6 cm

47. Calculen la medida de los ángulos del romboide.



$\hat{a} = 2 \,.\, 49° 30' = 99°$; $\hat{c} = 2 \,.\, 26° = 52°$

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360° \rightarrow$

$99° + \hat{b} + 52° + \hat{b} = 360° \rightarrow 2 \,.\, \hat{b} = 360° - 99° - 52°$

$\rightarrow \hat{b} = 209° : 2 \rightarrow \hat{b} = 104° 30' \rightarrow \hat{d} = 104° 30'$

$\hat{a} =$ 99°; $\hat{b} =$ 104° 30'; $\hat{c} =$ 52°; $\hat{d} =$ 104° 30'

46. Perímetro y área de figuras planas

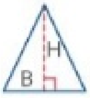
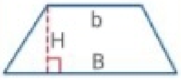
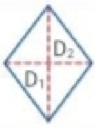
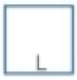
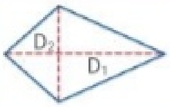
▶ SABERES DINÁMICOS

El **perímetro** de una figura es igual a la suma de las medidas de todos sus lados. Antes de calcular el perímetro, cada medida debe estar expresada en la misma unidad.
En el siguiente esquema se muestran las unidades de longitud.

km		hm		dam		m		dm		cm		mm
kilómetro		hectómetro		decámetro		metro		decímetro		centímetro		milímetro
	: 10		: 10		: 10		: 10		: 10		: 10	
	. 10		. 10		. 10		. 10		. 10		. 10	

Para medir una **superficie** se debe elegir una unidad de medida y determinar la cantidad de veces que entra en esa superficie.
Se llama **área** a la cantidad de veces que entra en la superficie la unidad de medida elegida.
En el siguiente esquema se muestran las unidades de área.

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2
kilómetro cuadrado		hectómetro cuadrado		decámetro cuadrado		metro cuadrado		decímetro cuadrado		centímetro cuadrado		milímetro cuadrado
	: 100		: 100		: 100		: 100		: 100		: 100	
	. 100		. 100		. 100		. 100		. 100		. 100	

FIGURA	DIBUJO	ÁREA	FIGURA	DIBUJO	ÁREA
Triángulo		$\frac{B \cdot H}{2}$	**Trapecio**		$\frac{(B + b) \cdot H}{2}$
Rectángulo		$B \cdot H$	**Rombo**		$\frac{D_1 \cdot D_2}{2}$
Cuadrado		L^2	**Romboide**		$\frac{D_1 \cdot D_2}{2}$
Paralelogramo		$B \cdot H$	**Círculo**		$\pi \cdot R^2$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿A cuántos dam equivale 1 km? 100 dam
   b. ¿Cuántos cuadrados de 1 cm de lado entran en un cuadrado de 1 dm de lado? 100 cuadrados.
   c. ¿Cuánto mide el área de un cuadrado cuya diagonal es $\sqrt{2}$ cm? 1 cm^2

ApAp

ACTIVIDADES

46. Perímetro y área de figuras planas

48. Tengan en cuenta los datos y calculen el perímetro de las siguientes figuras.

a. abcd rectángulo; $\overline{bd}$ = 10 cm; $\overline{ab}$ = 8 cm

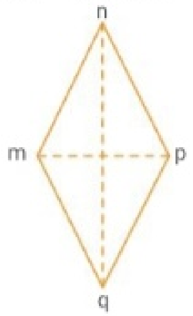
$\overline{ad}^2 = (10\ cm)^2 - (8\ cm)^2$

$\overline{ad}^2 = 100\ cm^2 - 64\ cm^2$

$\overline{ad} = \sqrt{36\ cm^2} \rightarrow \overline{ad} = 6\ cm$

Perímetro abcd = 2 . (8 cm + 6 cm) = 28 cm

b. mnpq rombo; $\overline{nq}$ = 6 cm; $\overline{mp}$ = 4 cm



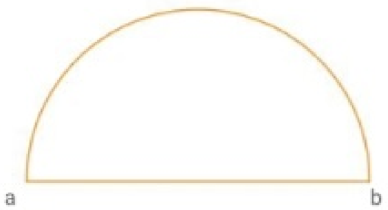
$\overline{mn}^2 = (3\ cm)^2 + (2\ cm)^2$

$\overline{mn}^2 = 9\ cm^2 + 4\ cm^2$

$\overline{mn} = \sqrt{13\ cm^2} \rightarrow \overline{mn} = \sqrt{13}\ cm$

Perímetro mnpq = $4 . \sqrt{13}$ cm

c. $\overline{ab}$ = 10 cm; perímetro de una circunferencia = π . d



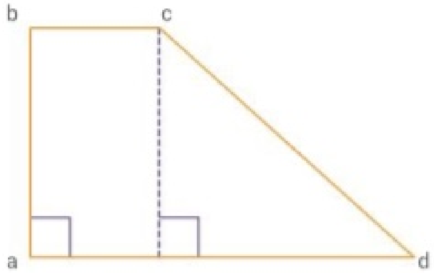
3,14 . 10 cm : 2 + 10 cm =

31,4 cm : 2 + 10 cm =

15,7 cm + 10 cm = 25,7 cm

Perímetro del semicírculo = 25,7 cm

d. $\overline{ad}$ = 5 cm; $\overline{bc}$ = 2 cm; $\overline{cd}$ = 5 cm



$\overline{ab}^2 = (5\ cm)^2 - (3\ cm)^2$

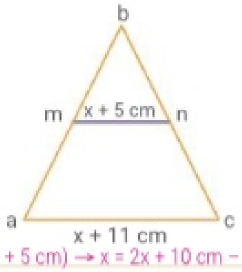
$\overline{ab}^2 = 25\ cm^2 - 9\ cm^2$

$\overline{ab} = \sqrt{16\ cm^2} \rightarrow \overline{ab} = 4\ cm$

Perímetro abcd = 5 cm + 5 cm + 2 cm + 4 cm = 16 cm

49. Calculen lo pedido en cada caso.

a. abc es triángulo equilátero;
"m" punto medio de $\overline{ab}$; "n" punto medio de $\overline{bc}$.



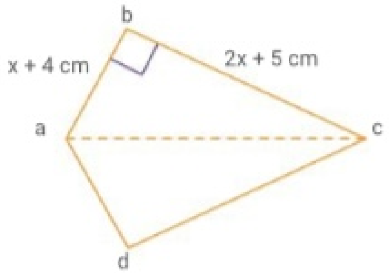
x + 11 cm = 2 . (x + 5 cm) → x = 2x + 10 cm − 11 cm

→ 1 cm = 2x − x → x = 1 cm

$\overline{ac}$ = 1 cm + 11 cm = 12 cm

x = 1 cm ; $\overline{ac}$ = 12 cm ; perímetro $\overset{\triangle}{abc}$ = 36 cm

b. Perímetro del romboide abcd = 36 cm



2 . (x + 4 cm + 2x + 5 cm) = 36 cm → 3x + 9 cm = 36 cm : 2

→ 3x = 18 cm − 9 cm → x = 9 cm : 3 → x = 3 cm

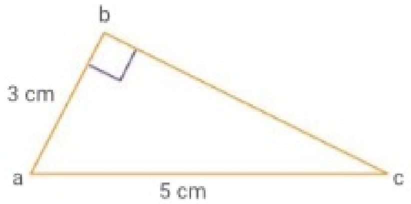
$\overline{ab}$ = 3 cm + 4 cm = 7 cm; $\overline{bc}$ = 2 . 3 cm + 5 cm = 11 cm; $\overline{ac} = \sqrt{170}$ cm

x = 3 cm ; $\overline{ab}$ = 7 cm ; $\overline{bc}$ = 11 cm ; $\overline{ac} = \sqrt{170}$ cm

46. Perímetro y área de figuras planas

50. Calculen el área de las siguientes figuras.

a. abc es triángulo.



$\overline{bc}^2 = (5\ cm)^2 - (3\ cm)^2$

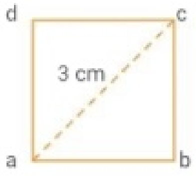
$\overline{bc}^2 = 25\ cm^2 - 9\ cm^2$

$\overline{bc} = \sqrt{16\ cm^2} \rightarrow \overline{ab} = 4\ cm$

Área = 3 cm . 4 cm : 2 = 6 cm^2

Área $a\hat{b}c$ = 6 cm^2

b. abcd es cuadrado.



$\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$

$(3\ cm)^2 = 2 . \overline{ab}^2$

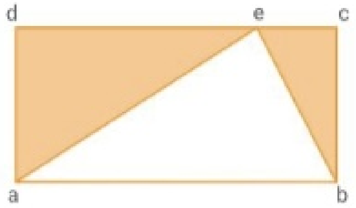
$9\ cm^2 : 2 = \overline{ab}^2 \rightarrow \overline{ab} = \sqrt{4{,}5}\ cm$

Área = $(\sqrt{4{,}5}\ cm)^2 = 4{,}5\ cm^2$

Área abcd = 4,5 cm^2

51. Calculen el área de la región sombreada en cada caso.

a. $\overline{ab}$ = 5 cm; $\overline{ad}$ = 2 cm



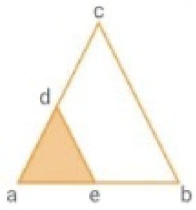
$\overline{ab} . \overline{bc} - 1/2 . (\overline{ab} . \overline{bc}) =$

$1/2 . (\overline{ab} . \overline{bc}) =$

1/2 . (5 cm . 2 cm) = 5 cm^2

Área sombreada = 5 cm^2

b. abc equilátero; área de abc = 10 cm^2;
"d" es punto medio de $\overline{ac}$; "e" es punto medio de $\overline{ab}$.



Área $a\hat{e}d$ = área $a\hat{b}c$: 4 =

Área $a\hat{e}d$ = 10 cm^2 : 4 = 2,5 cm^2

Área sombreada = 2,5 cm^2

52. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Si se duplica el lado de un cuadrado, su área también se duplica. F

El área se cuadruplica.

b. El área de un cuadrado cuya diagonal mide $\sqrt{2}$ cm es de 1 cm^2. V

c. Si el perímetro de un cuadrado se reduce a la mitad, el área es $\frac{1}{4}$ de la anterior. V

d. El área de un romboide cuyas diagonales miden 3 cm y 5 cm es de 15 cm^2. F

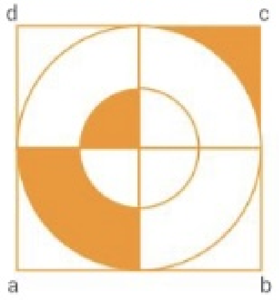
Es 7,5 cm^2.

e. Si se duplica la base de un rectángulo y se reduce a la mitad su altura, el área no varía. V

46. Perímetro y área de figuras planas

53. Calculen el área de la figura sombreada.

a. Diámetro circunferencia inscripta: 8 cm.



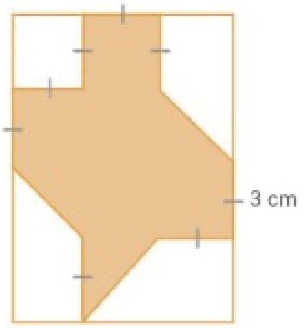
Área somb. = área del cuadrado : 4

Área somb. = $(8\ cm)^2 : 4$

Área somb. = $64\ cm^2 : 4 = 16\ cm^2$

Área sombreada = $16\ cm^2$

b.



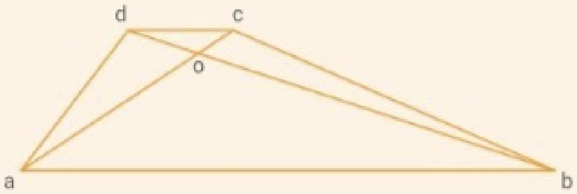
Área somb. = $5 \cdot (3\ cm)^2 + 3 \cdot (3\ cm)^2 : 2$

Área somb. = $5 \cdot 9\ cm^2 + 3 \cdot 9\ cm^2 : 2$

Área somb. = $45\ cm^2 + 13{,}5\ cm^2 = 58{,}5\ cm^2$

Área sombreada = $58{,}5\ cm^2$

Trac0 **54. Reúnanse en grupos, tengan en cuenta la siguiente figura y demuestren lo pedido en cada caso.**



a. Área $\overset{\triangle}{acd}$ = Área $\overset{\triangle}{cdb}$

Tienen la base en común y la misma altura.

b. Área $\overset{\triangle}{aod}$ = Área $\overset{\triangle}{cob}$

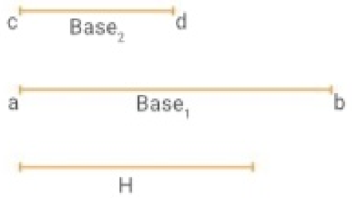
Siendo área $\overset{\triangle}{ado}$ + área ~~$\overset{\triangle}{cod}$~~ = área $\overset{\triangle}{cob}$ + área ~~$\overset{\triangle}{cod}$,~~ resulta área $\overset{\triangle}{ado}$ = área $\overset{\triangle}{cob}$.

DinámicaMente

Analicen la siguiente afirmación. Luego, dibujen un ejemplo y expliquen por qué es correcta. Comparen las respuestas con sus compañeros.
"Dos triángulos que tienen dos lados respectivamente congruentes y los ángulos comprendidos entre ellos suplementarios, tienen igual área". Las áreas son iguales porque tienen la misma base y altura.

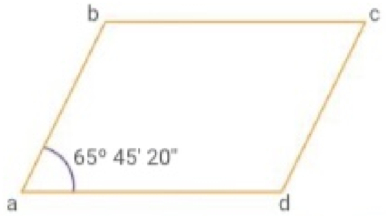
55. **Tengan en cuenta la medida de cada diagonal y del ángulo que forman al cortarse y construyan el paralelogramo. Pueden realizar la figura de análisis.** A cargo del alumno.

56. **Construyan un trapecio isósceles conociendo la medida de las bases y la altura.** A cargo del alumno.



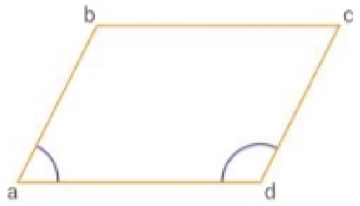
57. **Observen los paralelogramos y calculen los ángulos pedidos en cada caso.**

a.



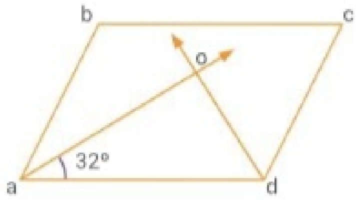
$\hat{b}$ = 114° 14' 40" ; $\hat{c}$ = 65° 45' 20" ; $\hat{d}$ = 114° 14' 40"

b. $\hat{a} = x + 30°$; $\hat{d} = 4x + 20°$



$\hat{a}$ = 56° ; $\hat{d}$ = 124°

c. $\overline{ao}$ bisectriz de $\hat{a}$; $\overline{do}$ bisectriz de $\hat{d}$.



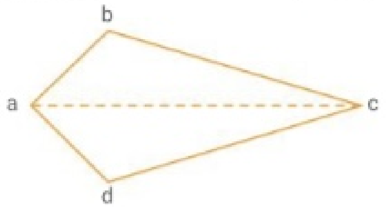
$\hat{a}$ = 64° ; $\hat{d}$ = 116° ; $a\hat{o}d$ = 90°

58. **Reúnanse en grupos y demuestren que las bisectrices correspondientes a dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son perpendiculares.** A cargo del alumno.

TracO

59. **Demuestren que los triángulos abc y adc son congruentes.**

abcd romboide Por LLL. $\overline{ac}$ es común; $\overline{ad} \cong \overline{ab}$; $\overline{dc} \cong \overline{bc}$.



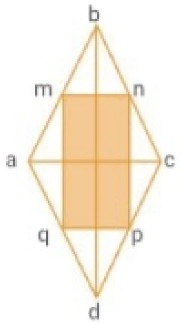
60. **Calculen el perímetro y el área de las figuras sombreadas en cada caso.**

a. abcd rombo

"m" es punto medio de $\overline{ab}$; "n" es punto medio de $\overline{bc}$.

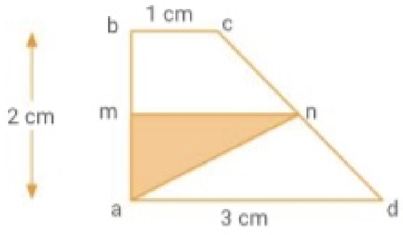
"p" es punto medio de $\overline{dc}$; "q" es punto medio de $\overline{ad}$.

$\overline{bd}$ = 6 cm; $\overline{ac}$ = 4 cm



Perímetro mnpq = 10 cm ; área mnpq = 6 cm²

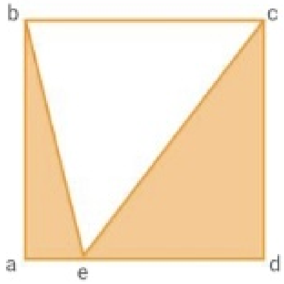
b. abcd trapecio rectángulo; $\overline{mn}$ base media.



Perímetro amn = $3+\sqrt{5}$ cm ; área amn = 1 cm²

61. **Calculen el perímetro y el área del cuadrado abcd.**

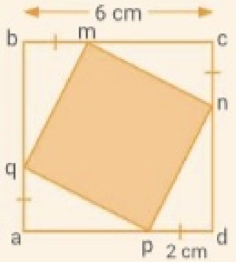
Área de la figura sombreada = 50 cm^2



Perímetro abcd = 40 cm; área abcd = 100 cm^2

Trac0

62. **Reúnanse en pequeños grupos y realicen lo pedido sabiendo que abcd es un cuadrado.**

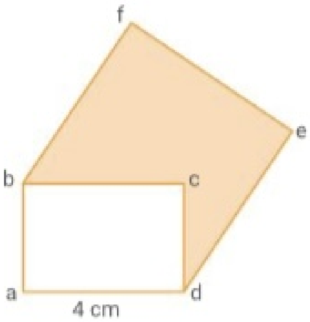


a. Demuestren que mnpq es cuadrado.
A cargo del alumno.

b. Calculen el área de mnpq.
20 cm^2

63. **Calculen el área de la figura sombreada.**

Perímetro del abcd = 13 cm



Área bcdef = 17,25 cm^2

64. **Lean atentamente y resuelvan.**

El área de un cuadrado es 50 cm^2. Calculen el área de otro cuadrado cuya diagonal mide 2 cm más que la del anterior. 72 cm^2

65. **Observen las siguientes figuras, sabiendo que la medida del lado de cada cuadrado es 1 cm.**

a. Calculen en todos los casos el perímetro y el área de cada figura.

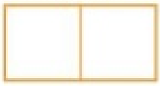
A

Per. A = 4 cm; área A = 1 cm^2

C

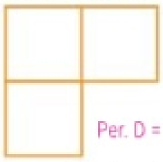
Per. C = 8 cm; área C = 3 cm^2

B



Per. B = 6 cm; área B = 2 cm^2

D



Per. D = 8 cm; área D = 3 cm^2

b. Reúnanse con un compañero y dibujen todas las maneras distintas en que se pueden disponer 4 cuadrados si siempre deben compartir un lado. Calculen en todos los casos el perímetro y el área de cada figura. A cargo del alumno.

c. Realicen lo mismo que en el ítem anterior, pero con 5 cuadrados. A cargo del alumno.

d. ¿Es cierto que para la misma cantidad de cuadrados, el perímetro de la figura siempre es el mismo? ¿Y el área? El perímetro puede variar pero el área es constante.

66. **Observen atentamente el siguiente *Tangram* cuadrado de 8 cm de lado y resuelvan.**

a. Calculen el área total. 64 cm^2

b. Calculen el área de cada región sombreada.

A

B

C

D

E

Área A = 4 cm^2; área B = 8 cm^2; área C = 16 cm^2; área D = 8 cm^2; área E = 8 cm^2.

7 Cuerpos

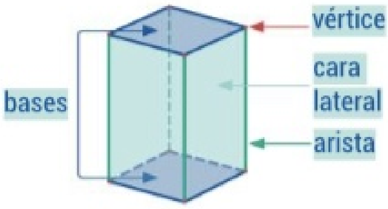
47. Clasificación de los cuerpos

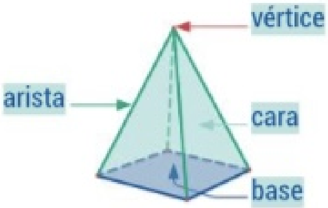
▶ SABERES DINÁMICOS

Los **cuerpos** se clasifican en poliedros y redondos.

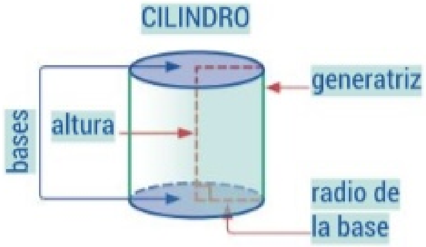
Poliedros: son los cuerpos que tienen todas sus caras planas y se clasifican en **prismas** y **pirámides**.

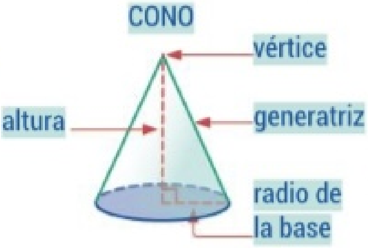
- **Prisma**: tiene dos caras paralelas (llamadas bases) y sus caras laterales son paralelogramos. En los prismas rectos las caras laterales son rectángulos.
- **Pirámide**: tiene una sola base y sus caras laterales son triángulos. En las pirámides rectas las caras laterales son triángulos isósceles congruentes.

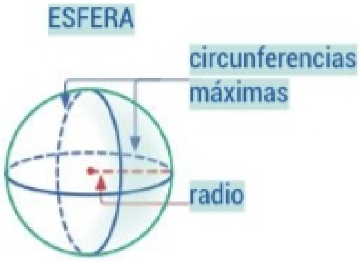




Redondos: son los cuerpos que tienen al menos una cara no plana y pueden rodar en alguna posición.



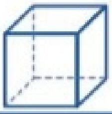




En los poliedros convexos se verifica la relación de Euler:

cantidad de caras + cantidad de vértices = cantidad de aristas + 2

Existen solo cinco **poliedros regulares**, es decir que todas sus caras son polígonos regulares congruentes.

Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Sus caras son cuatro triángulos equiláteros.	Sus caras son seis cuadrados.	Sus caras son ocho triángulos equiláteros.	Sus caras son doce pentágonos regulares.	Sus caras son veinte triángulos equiláteros.
				

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Un prisma, ¿puede tener alguna cara que sea un triángulo? Sí, sus bases pueden ser triángulos.
   b. El tetraedro ¿es un prisma? No, es una pirámide.
   c. Confeccionen una tabla con la cantidad de caras, de vértices y de aristas de los cinco poliedros regulares. A cargo del alumno.

ApAp

ACTIVIDADES

47. Clasificación de los cuerpos

PenCrit **1. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen las respuestas.**

a. La cantidad de caras de un prisma coincide con la cantidad de lados del polígono de la base. V

Porque se registra una cara lateral por cada lado del polígono que es base.

b. Los triángulos de las caras de las pirámides son siempre congruentes. F

Son congruentes si la pirámide es recta.

c. Si la base del prisma es un polígono regular, el prisma es regular. F

Para que un prisma sea regular debe tener polígonos regulares en todas sus caras.

d. En una pirámide la base siempre es un cuadrado. F

La base de una pirámide puede ser cualquier polígono.

e. Una pirámide formada por cuatro triángulos equiláteros es un tetraedro. V

Es un poliedro regular.

f. Si un cuerpo rueda y tiene dos bases circulares, es un cilindro. F

Puede ser un cono truncado.

TracO **2. Reúnanse con un compañero y resuelvan.**

a. Elijan un cuerpo geométrico y escriban instrucciones para que su compañero lo construya.

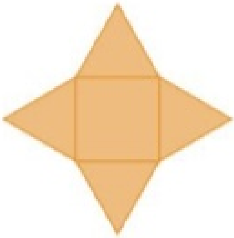
A cargo del alumno.

b. Intercambien sus producciones con su compañero y realicen el dibujo siguiendo las instrucciones. ¿Ambos pudieron llegar al dibujo del cuerpo que pensó el otro? Si la respuesta es no, expliquen cuáles fueron los errores y cómo lo pueden solucionar.

A cargo del alumno.

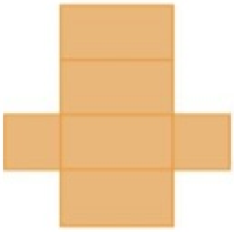
3. Observen los desarrollos e indiquen a qué cuerpo pertenece cada uno.

a.



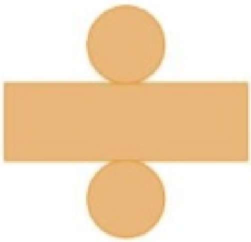
Pirámide de base cuadrada.

b.



Prisma de base cuadrada.

c.



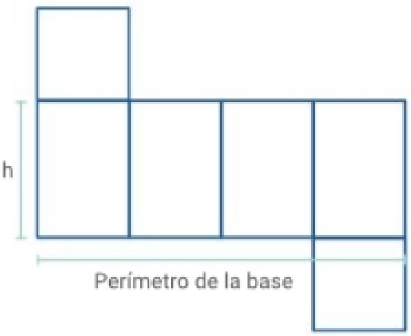
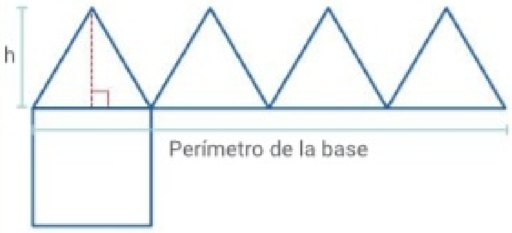
Cilindro.

48. Áreas lateral y total de cuerpos

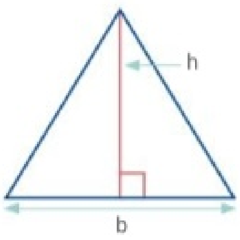
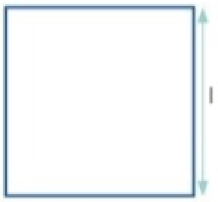
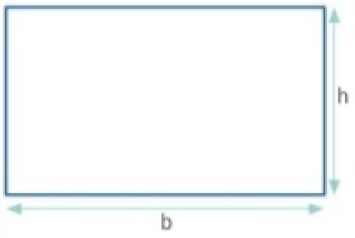
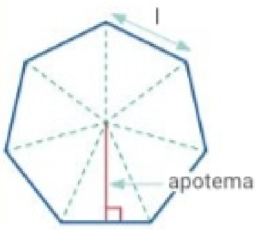
▶ SABERES DINÁMICOS

El **área lateral** de un cuerpo se obtiene sumando las áreas de sus caras laterales.
El **área total** de un cuerpo se obtiene sumando las áreas de las bases con las áreas de las caras laterales.

Áreas lateral y total de poliedros

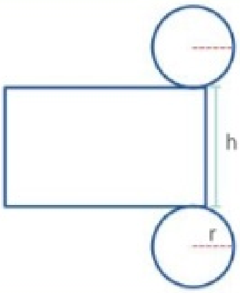
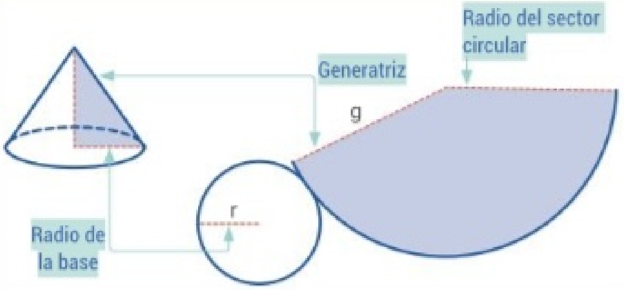
Cuerpo	Prisma recto	Pirámide regular
Caras laterales	Las caras laterales forman un rectángulo, cuya base es el perímetro de la base del prisma, y su altura es la del prisma.	Las caras laterales forman la mitad de un rectángulo, cuya base es el perímetro de la base de la pirámide, y su altura es igual a la altura de la cara lateral.
Desarrollo		
Área lateral	Área lateral = perímetro de la base . h	Área lateral = $\frac{\text{perímetro de la base . h}}{2}$
Área total	Área total = área lateral + 2 . área de la base	Área total = área lateral + área de la base

La base de un prisma es un polígono. Las siguientes fórmulas permiten calcular el área, según su forma.

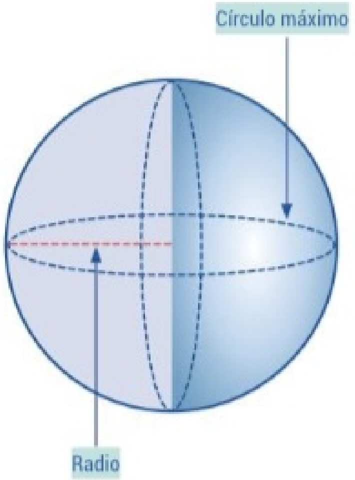
Triángulo	Cuadrado	Rectángulo	Polígono regular
			
Área = $\frac{b . h}{2}$	Área = l^2	Área = b . h	Área = $\frac{l . n . apotema}{2}$
b: base; h: altura	l: lado	b: base; h: altura	l: lado; n: cantidad de lados

48. Áreas lateral y total de cuerpos

Áreas lateral y total de cuerpos redondos

Cuerpo	Cilindro	Cono
Caras laterales	La cara lateral es un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro y cuya altura es la altura del cilindro.	La cara lateral de un cono es un sector circular; la longitud del arco es la misma que la longitud de la circunferencia de la base del cono. La generatriz se calcula con la propiedad pitagórica. $g^2 = r^2 + h^2$, entonces: $g = \sqrt{r^2 + h^2}$
Desarrollo		
Área lateral	Área lateral = $2 . \pi . r . h$	Área lateral = $\pi . r . g$
Área total	Área total = área lateral + $2 . \pi . r^2$	Área total = área lateral + $\pi . r^2$

El área de una **esfera** se puede cubrir totalmente con cuatro círculos máximos.



Área de la esfera = $4 . \pi . r^2$

a. El que tenga bases con mayor perímetro.
b. La de sus caras laterales.
c. Área de la cartulina: $(50 \text{ cm})^2 = 2\,500 \text{ cm}^2$
Área total de la caja: $3{,}14 . (10 \text{ cm})^2 . 2 + 3{,}14 . 10 \text{ cm} . 2 . 25 \text{ cm} = 628 \text{ cm}^2 + 1\,570 \text{ cm}^2 = 2\,198 \text{ cm}^2$
El área de la cartulina es mayor o igual que el área total de la caja cilíndrica; por lo tanto se la podrá cubrir.

TEST DE COMPRENSIÓN

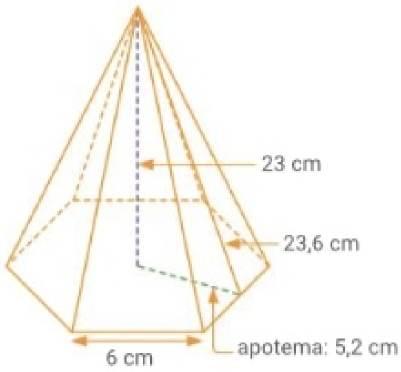
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si dos prismas tienen la misma altura, ¿cuál tiene mayor área lateral?
   b. Para calcular el área lateral de una pirámide, la altura que se usa ¿es la de la pirámide o la de sus caras laterales?
   c. A una caja cilíndrica con una altura de 25 cm y cuyo radio de la base es 10 cm se la quiere forrar con una cartulina de 50 cm de lado. ¿Qué cálculos se deben hacer para saber si alcanza la cartulina?

ApAp

48. Áreas lateral y total de cuerpos

4. Calculen el área lateral y el área total de cada cuerpo.

a. Pirámide de base hexagonal regular.



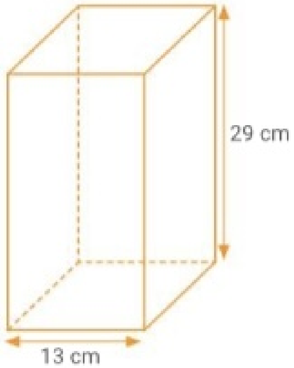
Área lateral: 6 . 6 cm . 23,6 cm : 2 = 424,8 cm^2

Área total: área lateral + 6 . 6 cm . 5,2 cm : 2 =

424,8 cm^2 + 93,6 cm^2 = 518,4 cm^2

Área lateral = 424,8 cm^2 Área total = 518,4 cm^2

b. Prisma de base cuadrada.



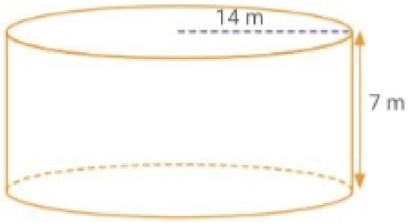
Área lateral: 4 . 13 cm . 29 cm = 1 508 cm^2

Área total: área lateral + 2 . (13 cm)^2 =

1 508 cm^2 + 338 cm^2 = 1 846 cm^2

Área lateral = 1 508 cm^2 Área total = 1 846 cm^2

c. Cilindro.



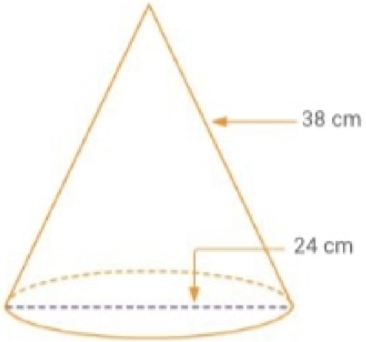
Área lateral: 3,14 . 14 m . 2 . 7 m = 615,44 m^2

Área total: área lateral + 2 . 3,14 . (14 m)^2 =

615,44 m^2 + 1 230,88 = 1 846,32 m^2

Área lateral = 615,44 cm^2 Área total = 1 846,32 cm^2

d. Cono.



Área lateral: 3,14 . 12 cm . 38 cm = 1 431,84 cm^2

Área total: área lateral + 3,14 . (12 cm)^2 = 1 431,84 cm^2 + 452,16 cm^2 = 1 884 cm^2

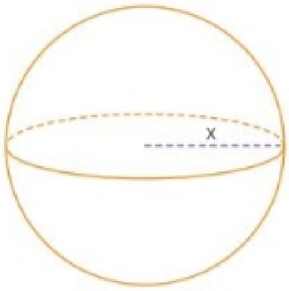
Área lateral = 1 431,84 cm^2 Área total = 1 884 cm^2

48. Áreas lateral y total de cuerpos

5. Calculen el valor de x.

a. Esfera.

Área total = 113,09 cm^2



$4 \,.\, 3{,}14 \,.\, x^2 = 113{,}09\ cm^2$

$12{,}56 \,.\, x^2 = 113{,}09\ cm^2$

$x^2 = 113{,}09\ cm^2 : 12{,}56$

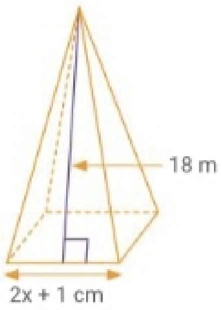
$x = \sqrt{9\ cm^2}$

$x = 3\ cm$

x = 3 cm

b. Pirámide de base cuadrada.

Área lateral = 360 m^2



$4 \,.\, (2x + 1\ m) \,.\, 18\ m : 2 = 360\ m^2$

$8x + 4\ m = 360\ m^2 : 18\ m \,.\, 2$

$8x = 40\ m - 4\ m$

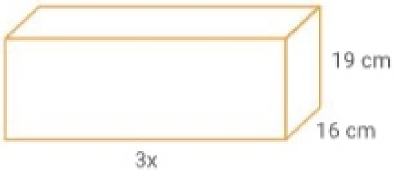
$x = 36\ m : 8$

$x = 4{,}5\ m$

x = 4,5 cm

c. Prisma recto.

Área total = 5 018 cm^2



$2 \,.\, (3x \,.\, 16\ cm + 3x \,.\, 19\ cm + 16\ cm \,.\, 19\ cm) = 5\,018\ cm^2$

$x \,.\, 48\ cm + x\ 57\ cm + 304\ cm^2 = 5\,018\ cm^2 : 2$

$x \,.\, 105\ cm = 2\,509\ cm^2 - 304\ cm^2$

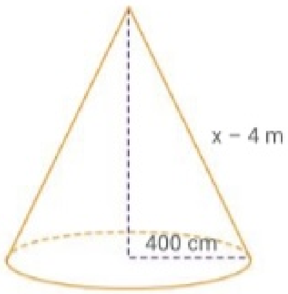
$x = 2\,205\ cm^2 : 105\ cm$

$x = 21\ cm$

x = 21 cm

d. Cono.

Área total = 201,06 m^2



$3{,}14 \,.\, 4\ m \,.\, (x - 4\ m) + 3{,}14 \,.\, (4\ m)^2 = 201{,}06\ m^2$

$12{,}56\ m \,.\, (x - 4\ m) + 50{,}24\ m^2 = 201{,}06\ m^2$

$12{,}56\ m \,.\, (x - 4\ m) = 201{,}06\ m^2 - 50{,}24\ m^2$

$x - 4\ m = 150{,}82\ m^2 : 12{,}56\ m$

$x = 12\ m + 4\ m \rightarrow x = 16\ m$

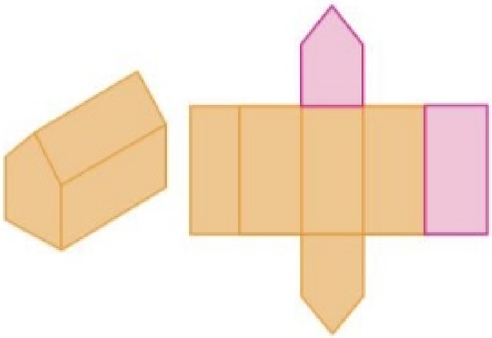
x = 16 m

6. **Escriban tres ejemplos de objetos que tengan la forma pedida en cada caso. Compartan las respuestas con sus compañeros.**

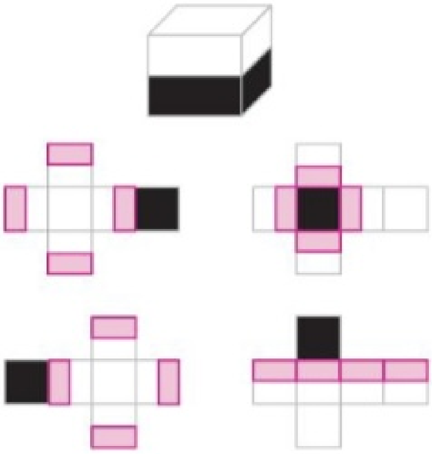
a. Prisma de base cuadrada.
Dado, caja de perfume, cubo de azúcar.
b. Cono.
Cucurucho de helado, cúpula de castillos, cono de papas fritas.
c. Pirámide de base cuadrada.
Pirámide de Keops, sostenedor de papeles, cúpula del Obelisco.
d. Esfera.
Pelota, lámpara, canica.

7. Lean atentamente y resuelvan.

a. El siguiente dibujo muestra una representación de un granero y un desarrollo incompleto del mismo. Completen el desarrollo del granero e indiquen si es la única opción posible.

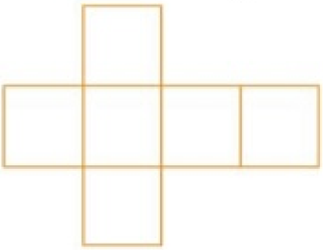


b. En la imagen del cubo, su mitad inferior aparece pintada de negro. Para cada uno de los desarrollos se ha pintado de negro la cara que forma la base del cubo. Completen cada esquema, pintando los cuadrados pertinentes.



8. **Indiquen a qué cuerpo pertenece cada desarrollo; luego, calculen las áreas lateral y total.**

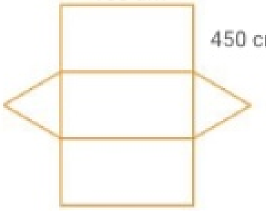
a.



Nombre del cuerpo: cubo.

Área lateral: $2\,116\ cm^2$; área total: $3\,174\ cm^2$

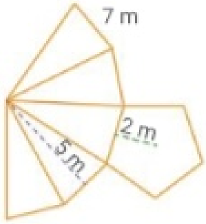
b.



Nombre del cuerpo: Prisma de base triangular.

Área lateral: 13,5 m ; área total: 152,54 m

c.

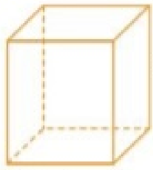


Nombre del cuerpo: Pirámide de base pentagonal.

Área lateral: $87{,}5\ cm^2$; área total: $122{,}5\ cm^2$

9. **Calculen el valor de x.**

a. Cubo. Área total = $337{,}5\ m^2$



x = 7,5 m

b. Cilindro. Área lateral = $4{,}71\ m^2$

x = 3 m

PenCrit **10. Escriban "a veces", "siempre" o "nunca", según corresponda. Expliquen sus respuestas.**

a. El área de una esfera [nunca] es el cuádruple del área de otra esfera que tiene la mitad de su radio.

b. La base de los prismas [a veces] son polígonos regulares.

c. Un cuerpo que tiene solo una base [a veces] es una pirámide.

d. El área lateral del cilindro [siempre] es el producto entre la altura y la longitud de la circunferencia de base.

e. Si un prisma es regular, entonces [siempre] es un cubo.

f. Una pirámide [nunca] tiene caras laterales rectangulares.

g. El área lateral de un cubo [nunca] es el doble del área lateral de otro cubo que tiene la mitad de su arista.

11. Lean atentamente y resuelvan.

a. En la librería venden papeles para regalo de 40 cm de ancho por 80 cm de largo. Se quiere envolver un regalo que está en una caja con forma de prisma de base cuadrada que mide 20 cm de base por 40 cm de altura. ¿Cuántos papeles se deberían comprar? Expliquen la respuesta.

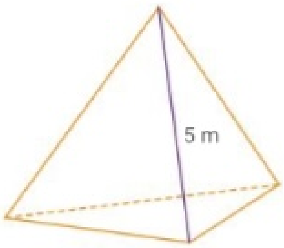
b. Se deben pintar 4 columnas cilíndricas de 3 metros de altura y 12 cm de radio cada una. Si cada litro de pintura rinde 10 m^2, ¿cuántos litros de pintura son necesarios para darle tres manos a cada columna?

c. ¿Cuántos metros cuadrados de venecitas se deben comprar para revestir completamente una pileta de 3,5 m de ancho, 7,5 m de largo por 1,6 m de profundidad?

a. Se deberían comprar dos papeles.
Área total del regalo: 4 000 cm^2; área de un papel: 3 200 cm^2 (no alcanza con un papel).
b. 2,71 litros
c. 61,45 m^2

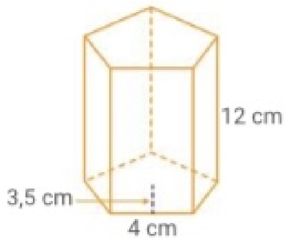
12. Calculen el área total de cada cuerpo.

a. Tetraedro.



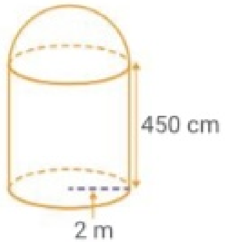
Área total: 43,3 m^2

b. Prisma de base pentagonal.



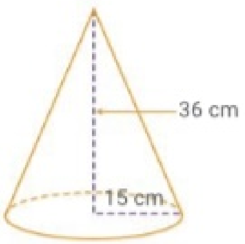
Área total: 310 cm^2

c.



Área total: 94,2 m

d. Cono.



Área total: 2 543,4 cm^2

49. Volumen de los cuerpos

▶ SABERES DINÁMICOS

Medir una cantidad de **volumen** significa comparar dicha cantidad con otra tomada como unidad de medida.

El **metro cúbico** (se escribe m^3) es el volumen de un cubo de 1 m de arista.

$$1\ m^3 = 1\,000\ dm^3$$

En el siguiente esquema se muestra la relación entre las unidades de volumen.

km^3 kilómetro cúbico	hm^3 hectómetro cúbico	dam^3 decámetro cúbico	m^3 metro cúbico	dm^3 decímetro cúbico	cm^3 centímetro cúbico	mm^3 milímetro cúbico

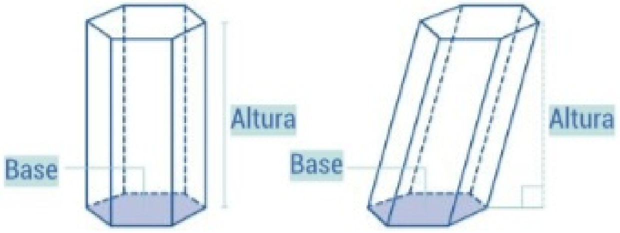
Hacia la derecha (de cada unidad a la siguiente): . 1 000

Hacia la izquierda (de cada unidad a la anterior): : 1 000

Volumen del prisma

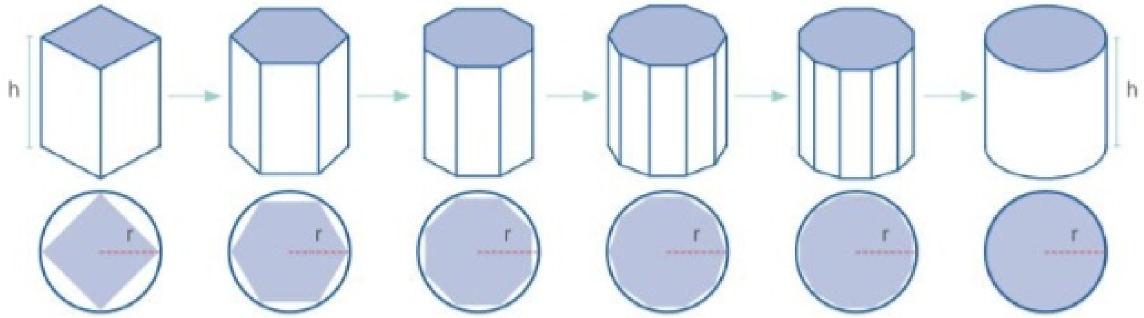
Se obtiene a partir de multiplicar el área de la base por la altura del prisma.

Volumen del prisma = área base . altura



Volumen del cilindro

Si en un prisma regular se aumenta cada vez más la cantidad de lados de la base, se obtiene como base una figura geométrica plana que se aproxima cada vez más a un círculo.



Entonces, el volumen se obtiene multiplicando el área de la base por la altura:

$$\text{Volumen del cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

49. Volumen de los cuerpos

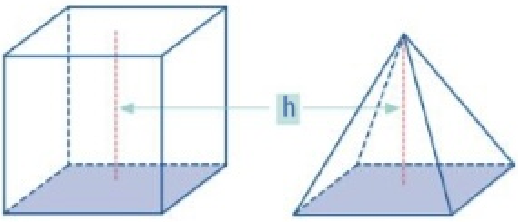
Volumen de la pirámide

El volumen de tres pirámides completan el volumen de un prisma de igual base y altura.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/volpira * para mirar un video que explica cómo el contenido de tres pirámides completan el volumen de un prisma con la misma base y altura.

* Enlace acortado de https://youtu.be/bDPbIOJ264U

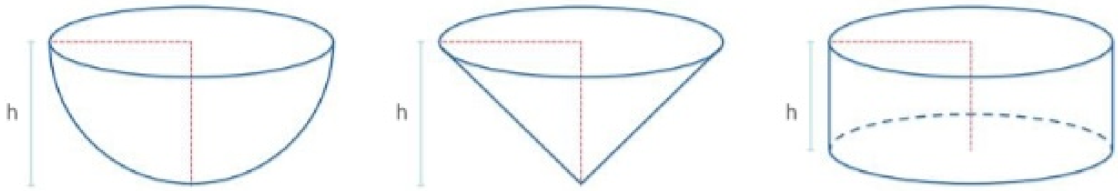


Volumen de la pirámide = $\frac{1}{3}$. volumen del prisma = $\frac{1}{3}$. área base . altura

Volumen del cono y de la esfera

Se pueden establecer experimentalmente las relaciones entre el volumen del cilindro, el cono y la esfera.

Por ejemplo, se tienen en cuenta tres recipientes: uno semiesférico, uno cónico y otro cilíndrico, de igual radio y altura. Si se llena con agua el cono y se vierte su contenido en el cilindro, se verifica que para llenar este último son necesarios exactamente 3 conos. En cambio, para llenar la semiesfera se necesita verter el contenido de 2 conos.



Volumen del cono = $\frac{1}{3}$. volumen del cilindro = $\frac{1}{3}$. π . r^2 . altura

Volumen de la semiesfera = 2 . volumen del cono = 2 . $\frac{1}{3}$. π . r^2 . altura = $\frac{2}{3}$. π . r^3

(en la esfera la altura es igual al radio)

Volumen de la esfera = 2 . volumen de la semiesfera = 2 . $\frac{2}{3}$. π . r^3 = $\frac{4}{3}$. π . r^3

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿A cuántos centímetros cúbicos equivale un metro cúbico?
   b. Si una pirámide y un prisma tienen igual base, ¿cómo deben ser sus alturas para que sus volúmenes sean iguales?
   c. Si un cono y un cilindro tienen igual base, pero la altura del cono es la mitad de la altura del cilindro, ¿cuántos conos son necesarios para completar el volumen del cilindro?

ApAp

a. 1 m^3 equivale a 1 000 000 cm^3.
b. La altura de la pirámide debe ser el triple de la altura del prisma.
c. 6 conos.

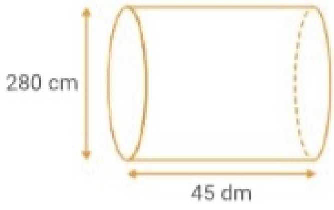
49. Volumen de los cuerpos

13. **Completen la siguiente tabla.**

	a km^3	a m^3	a cm^3
315 dam^3	$3{,}15 . 10^{-4}$	315 000	$3{,}15 . 10^{11}$
9 hm^3	$9 . 10^{-3}$	9 000 000	$9 . 10^{12}$
12 100 mm^3	$1{,}21 . 10^{-14}$	$1{,}21 . 10^{-5}$	12,1
245 dm^3	$2{,}45 . 10^{-10}$	0,245	245 000
0,5 hm^3	$5 . 10^{-4}$	500 000	$5 . 10^{14}$

14. **Calculen el volumen de los siguientes cuerpos. Expresen los resultados en m^3.**

a.

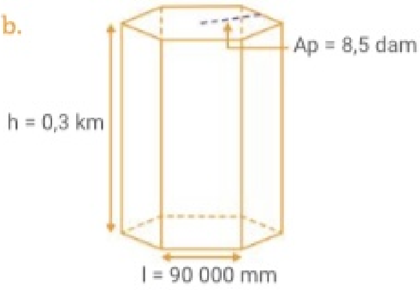


$3{,}14 . (1{,}4\ m)^2 . 4{,}5\ m =$

$3{,}14 . 1{,}96\ m^2 . 4{,}5\ m = 27{,}69\ m^3$

Volumen = $27{,}69\ m^3$

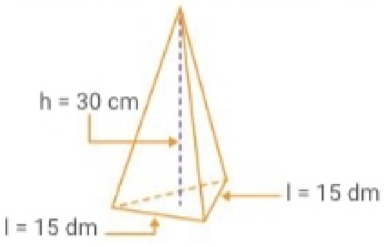
b.



$6 . 90\ m . 85\ m . 300\ m : 2 = 6\,885\,000\ m^3$

Volumen = $6\,885\,000\ m^3$

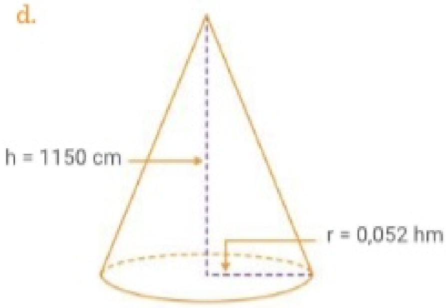
c. La base de la pirámide es un triángulo rectángulo.



$1/3 . 1{,}5\ m . 1{,}5\ m . 0{,}3\ m : 2 = 0{,}1125\ m^3$

Volumen = $0{,}1125\ m^3$

d.



$1/3 . 3{,}14 . (5{,}2\ m)^2 . 11{,}5\ m = 325{,}47\ m^3$

Volumen = $325{,}47\ m^3$

49. Volumen de los cuerpos

15. **Resuelvan.**

a. Calculen la altura de un prisma de base cuadrada, sabiendo que su volumen es de 145 m^3 y el lado de la base mide 5 m.

$(5\ m)^2 . h = 145\ m^3$

$25\ m^2 . h = 145\ m^3$

$h = 145\ m^3 : 25\ m^2$

$h = 5{,}8\ m$

b. El radio de una pelota de vóley es de 21 cm. ¿Cuál es el volumen de aire que contiene en su interior?

Volumen $= 4/3 . 3{,}14 . (21\ cm)^3 =$

$4/3 . 3{,}14 . 9\,261\ cm^3 = 38\,772{,}72\ cm^3$

c. ¿Cuántos metros cúbicos de arena son necesarios para llenar 38 baldes de 25 cm de diámetro por 45 cm de altura?

$38 . 3{,}14 . (0{,}125\ m)^2 . 0{,}45\ m =$

$38 . 3{,}14 . 0{,}016\ m^2 . 0{,}45\ m = 0{,}84\ m^3$

d. En un vivero venden bolsas de tierra fértil de 12 dm^3 cada una. ¿Cuántas bolsas se necesitan para llenar 15 macetas de 10 cm de diámetro por 15 cm de altura?

$15 . 3{,}14 . (0{,}5\ dm)^2 . 1{,}5\ dm =$

$15 . 3{,}14 . 0{,}25\ dm^2 . 1{,}5\ dm = 17{,}66\ dm^3$

Necesitan 2 bolsas (24 dm^3) porque con una (12 dm^3) no alcanza.

DinámicaMente

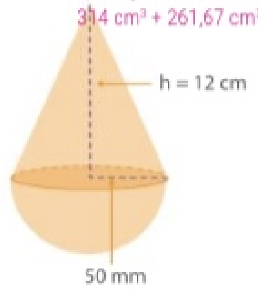
Calculen el volumen de las áreas sombreadas de cada cuerpo.

a.

$1/3 . 3{,}14 . (5\ cm)^2 . 12\ cm + 1/2 . 4/3 . 3{,}14 . (5\ cm)^3 =$

$1/3 . 3{,}14 . 25\ cm^2 . 12\ cm + 1/2 . 4/3 . 3{,}14 . 125\ cm^3 =$

$314\ cm^3 + 261{,}67\ cm^3 = 575{,}67\ cm^3$



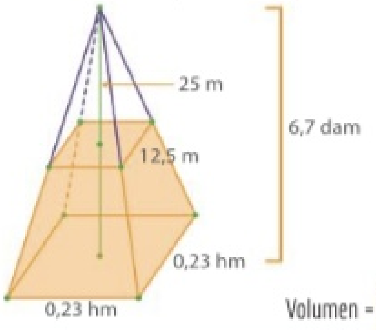
Volumen = $575{,}67\ cm^3$

b.

$1/3 . (23\ m)^2 . 67\ m - 1/3 . (12{,}5\ m)^2 . 25\ m =$

$1/3 . 529\ m^2 . 67\ m - 1/3 . 156{,}25\ m^2 . 25\ m =$

$11\,814{,}33\ m^3 - 1\,302{,}08\ m^3 = 10\,512{,}25\ m^3$



Volumen = $10\,512{,}25\ m^3$

50. Unidades de capacidad y de masa

▶ SABERES DINÁMICOS

Unidades de capacidad

La **capacidad** de un recipiente indica la cantidad de sustancia que puede contener.
El **litro** es una unidad de capacidad que equivale a 1 decímetro cúbico (1 dm^3).

Relaciones entre las unidades de capacidad y volumen

1 kl = 1 m^3 1 l = 1 dm^3 1 ml = 1 cm^3

En el siguiente esquema se muestra la relación entre las unidades de capacidad.

	. 10 →		. 10 →		. 10 →		. 10 →		. 10 →		. 10 →	
kl		hl		dl		l		dl		cl		ml
kilolitro		hectolitro		decalitro		litro		decilitro		centilitro		mililitro
	← : 10		← : 10		← : 10		← : 10		← : 10		← : 10	

Unidades de masa

El **peso** de un cuerpo es la fuerza con que el cuerpo es atraído hacia el centro de la Tierra. La unidad para medir el peso es el kilogramo fuerza (se escribe kgf).
La **masa** de un cuerpo es la cantidad de materia que forma ese cuerpo. La unidad para medir la masa de un cuerpo es el **gramo** (se escribe g).
En el siguiente esquema se muestra la relación entre las unidades de masa.

	. 10 →		. 10 →		. 10 →		. 10 →		. 10 →		. 10 →	
kg		hg		dag		g		dg		cg		mg
kilogramo		hectogramo		decagramo		gramo		decigramo		centigramo		miligramo
	← : 10		← : 10		← : 10		← : 10		← : 10		← : 10	

Existen otras unidades de masa como la tonelada (t) que se usa para medir cuerpos más pesados.

1 t = 1 000 kg

Se define como **densidad** (se escribe δ) de una sustancia a la masa por unidad de volumen de la misma.

$$\delta = \frac{M}{V}$$

Una unidad utilizada para medir la densidad es el g/cm^3.

Áreas dinámicas [Matemática y Ciencias Naturales]

Para conocer el estado de salud de nuestros huesos se mide la densidad mineral ósea; las cifras normales de densidad mineral ósea oscilan entre 0,97 y 1,28 g/cm^2. Si es menor de 0,97 nuestros huesos son susceptibles de sufrir una fractura patológica y es necesario un tratamiento de calcificación.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuántos centímetros cúbicos debe tener un envase para que tenga un litro de capacidad?
   b. ¿Cuál es la diferencia entre kilogramo y kilogramo fuerza?
   c. Si una persona viaja a la Luna, ¿será menor su masa o su peso? (La atracción de la Luna es menor que la de la Tierra)

ApAp

a. 1 000 cm^3.
b. El kilogramo mide masas y el kilogramo fuerza mide fuerza.
c. Si una persona viaja a la Luna su masa será la misma, pero su peso será menor porque la atracción gravitatoria de la Luna es menor que la de la Tierra.

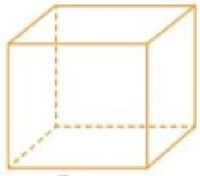
50. Unidades de capacidad y de masa

16. **Completen la siguiente tabla.**

	En litros	En mililitros	En kilolitros
1200 cm^3	1,2	1 200	0,0012
340 dl	34	34 000	0,034
15 dm^3	15	15 000	0,015
15 hl	1 500	1 500 000	1,5
0,25 m^3	250	250 000	0,25

17. **Calculen la capacidad, en litros, de los siguientes cuerpos.**

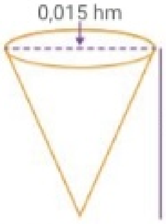
a. Cubo.



$(7\ m)^3 = (70\ dm)^3 = 343\,000\ dm^3 = 343\,000$ litros

Capacidad = 343 000 litros

b. Cono.



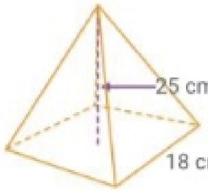
$1/3 \cdot 3,14 \cdot (7,5\ dm)^2 \cdot 130\ dm =$

$1/3 \cdot 3,14 \cdot 56,25\ dm^2 \cdot 130\ dm =$

$7\,653\ dm^3 = 7\,653,75$ litros

Capacidad = 7 653,75 litros

c. Pirámide de base cuadrada.



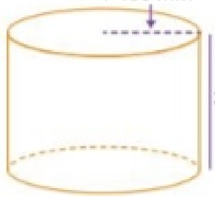
$1/3 \cdot (1,8\ dm)^2 \cdot 2,5\ dm =$

$1/3 \cdot 3,24\ dm^2 \cdot 2,5\ dm =$

$2,7\ dm^3 = 2,7$ litros

Capacidad = 2,7 litros

d. Cilindro.



$3,14 \cdot (14,5\ dm)^2 \cdot 32\ dm =$

$3,14 \cdot 210,25\ dm^2 \cdot 32\ dm =$

$21\,125,92\ dm^3 = 21\,125,92$ litros

Capacidad = 21 125,92 litros

DinámicaMente

Resuelvan con un compañero.

a. La densidad del acero es 7,8 g/cm^3. ¿Cuál es el volumen de 1560 g de acero?

b. Un cubo sólido tiene aristas de 8 cm y una masa de 0,128 kg. ¿Cuál es su densidad en g/cm^3?

a. Volumen = 1 560 g : 7,8 g/cm^3 = 200 cm^3

b. Densidad = 128 g : $(8\ cm)^3$ = 0,25 g/cm^3

TracO

Integración final

PenCrit

18. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a. El volumen de un cuerpo es lo mismo que su capacidad. F

b. El peso de un objeto en la Luna es mayor al peso del mismo objeto en la Tierra. F

c. La masa de un objeto en la Tierra es igual a la masa de ese objeto en la Luna. V

d. Para averiguar la densidad de un material son necesarios su masa y su volumen. V

e. En un cubo de 1 m de arista caben 1 000 l de agua. V

19. Lean atentamente y resuelvan.

Consideren una esfera de radio r. Escriban en qué proporción aumenta o disminuye el volumen en cada caso.

a. Se duplica la longitud del radio.
Es 8 veces mayor.

b. Se reduce a la mitad la longitud del radio.
Es 1/8 del original.

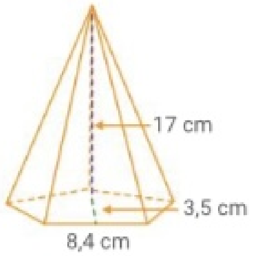
c. Se duplica la longitud del diámetro.
Es 8 veces mayor.

20. Completen la tabla.

hm^3	m^3	cm^3	mm^3
$1,7 . 10^{-5}$	17	17 000 000	$1,7 . 10^{10}$
0,03512	35 120	$3,512 . 10^{10}$	$3,512 . 10^{13}$
$5,4 . 10^{-3}$	5 400	$5,4 . 10^{9}$	$5,4 . 10^{12}$
$2,7 . 10^{-4}$	270	$2,7 . 10^{8}$	$2,7 . 10^{11}$
890	$8,9 . 10^{8}$	$8,9 . 10^{14}$	$8,9 . 10^{17}$
$5,6 . 10^{-6}$	5,6	5 600 000	$5,6 . 10^{9}$

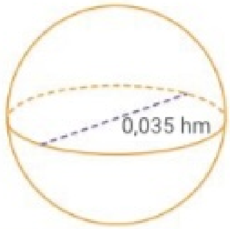
21. Calculen el volumen y la capacidad de los siguientes cuerpos.

a.



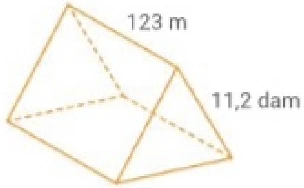
Volumen = 416,5 cm^3 ; capacidad = 416,5 ml

b.



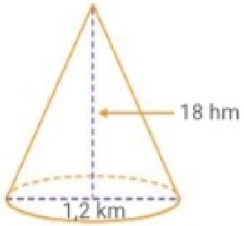
Volumen = 22,44 m^3 ; capacidad = 22,44 kl

c.



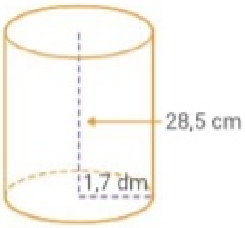
Volumen = 668 136 m^3 ; capacidad = 668 136 kl

d.



Volumen = 678 240 000 m^3 ; capacidad = 678 240 000 kl

e.



Volumen = 25 862,61 cm ; capacidad = 25 862,61 ml

22. Completen las tablas.

a.

hl	l	cl	m³
0,35	35	3 500	0,035
1,98	198	19 800	0,198
760	76 000	7 600 000	76
51	5 100	510 000	5,1

b.

	kg	dg	mg
0,3 hg	0,03	300	30 000
28 dag	0,28	2 800	280 000
2 500 g	2,5	25 000	2 500 000
8 000 cg	0,08	800	80 000

23. Lean atentamente y resuelvan.

a. Un balde que contiene 20 litros de pintura tiene un diámetro de 25 cm. ¿Qué altura tiene el balde?
4,076 dm.

b. ¿Cuántos litros de agua tiene una pileta rectangular de 3,5 m de ancho por 7 m de largo por 1,65 m de profundidad? Si la densidad del agua es 1 g/cm³, ¿cuál es la masa del agua?
40 425 litros. 40 425 kg.

c. Si la densidad del aceite es 0,92 g/cm³, ¿cuántas botellas de 1,5 l se pueden llenar con una masa de 5 000 g?
3 botellas.

d. La densidad del oro es 19,3 g/cm³. ¿Cuál es la masa de un dije de oro con forma de cubo que tiene aristas de 0,6 mm?
0,00417 g.

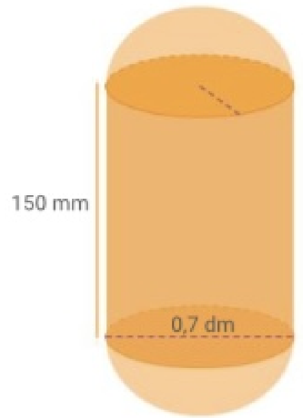
e. Un dado tiene una masa de 15 g. Si se lo introduce en un vaso con agua, desplaza un volumen de 1,728 cm³ de agua. ¿Cuál es la densidad del dado?
8,68 g/cm³.

f. La densidad del mármol es 2,7 g/cm³. ¿Cuál es la masa de una mesada de mármol de 2,5 m de largo por 0,65 m de profundidad por 0,05 m de alto?
219,375 kg.

g. La densidad del hormigón es 2 400 kg/m³. ¿Cuál es la masa de una columna de hormigón cilíndrica de 15 cm de radio por 3,2 metros de altura?
542,592 kg.

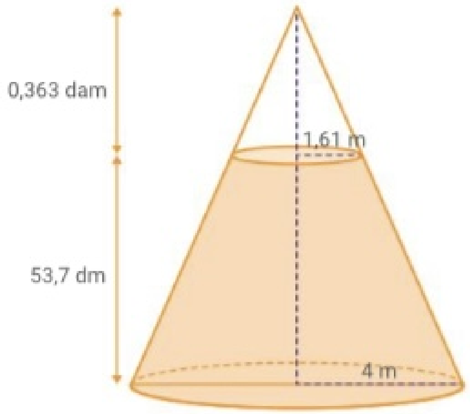
24. Calculen el volumen y la capacidad de la parte pintada de cada cuerpo.

a.



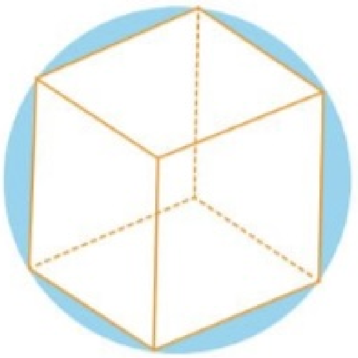
Volumen = 0,757 dm³ ; capacidad = 0,757 l

b.



Volumen = 140,87 m³ ; capacidad = 140,87 kl

c.



arista del cubo = 15 m radio de la esfera = 130 dm

Volumen = 5 823,11 m³ ; capacidad = 5 823,11 kl

8 Probabilidad y estadística

51. Población y muestra. Organización de la información

▶ SABERES DINÁMICOS

La **población** es el conjunto de individuos o elementos que son objeto de estudio (personas, animales, plantas, etc.). Si la población es muy numerosa, se selecciona una parte de la misma que se denomina **muestra**, la cual debe ser representativa (con características similares a la población).
Cada tema sobre el que se estudia una población se denomina **variable**. Existen dos tipos de variables:

- **Cuantitativas**: son las que se pueden medir con datos numéricos, por ejemplo: sueldo de los empleados de una empresa.
- **Cualitativas**: son las que no se pueden medir con números, por ejemplo: religión de los empleados de una empresa.

Para obtener los datos de una variable se necesita un instrumento de recolección de datos. Los más utilizados son: encuestas, entrevistas, observaciones, cuestionarios, experimentos, etc.
A partir de sus resultados se pueden analizar las frecuencias de cada valor de la variable.
Frecuencia absoluta (f): es la cantidad de veces que se repite un cierto valor de la variable.

Frecuencia relativa (fr): es el resultado de dividir la frecuencia absoluta por el número de elementos de la muestra.

Frecuencia relativa porcentual (fr%): es la frecuencia relativa expresada en forma decimal multiplicada por 100.

Frecuencia absoluta acumulada (fa): es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores menores o iguales a un cierto valor.

Los datos se pueden organizar en tablas para facilitar el análisis de la información.

En una escuela de 400 alumnos se realizó una encuesta para saber cuántos hermanos tenían y los resultados fueron volcados en esta tabla.

Cantidad de hermanos	f	fr	fr%	fa
0	28	0,07	7%	28
1	120	0,30	30%	148
2	152	0,38	38%	300
3 o más	100	0,25	25%	400
Total	400	1,00	100%	400

Cuando los resultados dan un gran número de valores, se agrupan en intervalos de clases con la misma amplitud.
Se registraron las alturas de 50 alumnos.
Los valores se agruparon en intervalos de 10 cm.

Altura (en cm)	f	fr	fr%	fa
[130; 140)	13	0,26	26%	13
[140; 150)	17	0,34	34%	30
[150; 160)	12	0,24	24%	42
[160; 170)	8	0,16	16%	50
Total	50	1	100%	50

TIP

El intervalo [130; 140) incluye al 130, pero no al 140.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. En el ejemplo referido a la cantidad de hermanos, ¿cuál es la población, la muestra y la variable? ¿Qué valores toma?
   b. ¿Qué métodos de recolección de datos fueron utilizados en cada ejemplo?
   ApAp c. Den otro ejemplo de una variable que pueda tomar un gran número de valores y sea necesario agruparlos en intervalos.

a. Población: los 400 alumnos de una escuela; muestra: los 400 alumnos; variable: "cantidad de hermanos"; valores que toma: 0, 1, 2, 3 o más.
b. En el ejemplo de los hermanos se utilizó una encuesta; en el de la altura se utilizó un registro.
c. Por ejemplo: peso en kg de los 50 alumnos.

ACTIVIDADES

51. Población y muestra. Organización de la información

PenCrit **1. Lean atentamente, completen la tabla y resuelvan.**

En un cumpleaños con 150 invitados, el gerente del salón de fiestas infantiles realizó una encuesta a 20 individuos sobre la calidad del servicio. Las respuestas fueron volcadas en la siguiente tabla.

Calidad del servicio	f	fr	fr%	fa
Malo	2	0,10	10%	2
Regular	1	0,05	5%	3
Bueno	6	0,30	30%	9
Muy bueno	9	0,45	45%	18
Excelente	2	0,10	10%	20
Total	20	1	100%	20

a. ¿Cuál es la población y cuál es la muestra?

Población: 150 invitados de una fiesta; muestra: 20 invitados.

b. ¿Cuál es la variable y de qué tipo?

"Calidad del servicio", es cualitativa.

c. De las personas encuestadas, ¿cuántas quedaron satisfechas con la calidad del servicio?

17 personas.

d. Tengan en cuenta la encuesta y escriban una conclusión acerca de la calidad del servicio.

A cargo del alumno.

2. Resuelvan en la carpeta.

En un parque de diversiones se registraron las alturas de los ingresantes a las primeras dos vueltas de la montaña rusa, y estos fueron los resultados:

1,40	1,50	1,62	1,72	1,63	1,80	1,89	1,34	1,45	1,68
1,68	1,34	1,46	1,82	1,53	1,86	1,53	1,69	1,64	1,65
1,31	1,67	1,67	1,39	1,63	1,52	1,62	1,73	1,66	1,35
1,52	1,72	1,42	1,53	1,56	1,75	1,70	1,58	1,33	1,75

a. Indiquen cuál es la variable y de qué tipo.
"Altura de los ingresantes a las primeras dos vueltas de la montaña rusa", es cuantitativa.

b. Establezcan los intervalos en los que agruparían los valores de la variable y realicen una tabla de frecuencias.
Los intervalos pueden ser: [1,30; 1,40), [1,40; 1,50), [1,50; 1,60), [1,60; 1,70), [1,70; 1,80), [1,80; 1,90).

c. En el barco pirata la altura mínima para ingresar es de 1,50 m. Calculen el porcentaje de los ingresantes a las primeras dos vueltas de la montaña rusa que podrá subir a este juego.
75%.

CyRes **3. Lean atentamente y completen la tabla. Luego, resuelvan.**

En una escuela de 520 alumnos se seleccionaron al azar 50 estudiantes (de diferentes cursos) para realizar un estudio de consumo donde se ofreció una merienda de cereales sin azúcar. Se registraron los consumos por alumno y los resultados se volcaron en esta tabla.

Cantidad de cereales (g)	f	fr	fr%
[0; 20)	30	0,60	60%
[20; 40)	15	0,30	30%
[40; 60)	3	0,06	6%
[60; 80)	2	0,04	4%
[80; 100)	0	0,00	0%
Total	50	1	100%

a. ¿Cuál es la población y cuál es la muestra? ¿Es representativa? Población: 520 alumnos de una escuela; muestra: 50 estudiantes. Sí, es representativa porque fueron elegidos al azar.

b. Indiquen cuál es la variable y de qué tipo.

"Cantidad de gramos de cereales sin azúcar en la merienda", es cuantitativa.

c. Un alumno dijo que 30 estudiantes no consumieron cereales. ¿Puede ser correcto? ¿Por qué?

Sí, porque la frecuencia del intervalo donde se encuentra la opción de no haber consumido cereales es de 30.

d. Investiguen cuál es la importancia del consumo de cereales y compartan la información con sus compañeros. A cargo del alumno.

52. Promedio, moda y mediana

▶ SABERES DINÁMICOS

Medidas	Definición	Símbolo
Promedio o media	Es la suma de todos los valores de la variable dividida por la cantidad de elementos de la muestra.	$\bar{x}$
Moda	Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia. Puede haber más de una moda en una variable.	m_o
Mediana	Es el valor de la variable que ocupa el lugar central. Para obtenerla primero hay que ordenar todos los valores de menor a mayor. Si la cantidad de los elementos de la muestra es par, la mediana es el promedio de los dos valores centrales.	m_e

En un campeonato de natación juvenil se registraron las edades de los nadadores que llegaron a la final regional. Los resultados fueron ordenados de menor a mayor: 14, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 17, 18, 18. Luego, fueron volcados en una tabla:

Edad	f
14	1
15	4
16	1
17	2
18	2

Cálculo del promedio: $\bar{x} = \dfrac{14+15+15+15+15+16+17+17+18+18}{10}$ $\quad \bar{x} = \dfrac{160}{10}$ $\quad \bar{x} = 16$

Utilizando los datos de la tabla, el cálculo sería: $\bar{x} = \dfrac{14.1+15.4+16.1+17.2+18.2}{10}$ $\quad \bar{x} = 16$

La moda es 15 porque es el valor de mayor frecuencia. $m_o = 15$

Para conocer la mediana, como la cantidad de la muestra es par, se calcula el promedio de los dos valores centrales.

14, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 17, 18, 18 $\quad m_e = \dfrac{15+16}{2}$ $\quad m_e = 15{,}5$

Áreas dinámicas... [Matemática y ESI (Educación Sexual Integral)]

"Hace más de 100 años la menarca (primera menstruación) se presentaba a los 16 o 17 años, pero en las últimas décadas en general se da más temprano. En los países desarrollados se presenta aproximadamente entre los 10 años y los 17 años, aunque es importante aclarar que a partir de los 8 años se considera que está dentro de los márgenes esperables y no presenta ningún tipo de anomalía o patología. La edad promedio es de 12,5 años (igual que en la Argentina).

Fuentes: https://www.clarin.com/hijos/adolescencia-menstruacion-ginecologia_0_HytWzTOPme.html y **https://www.sac.org.ar/actualidad/menarca-riesgo-cardiaco-y-prevencion/**

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si en el ejemplo anterior se cambia un 17 por un 18, ¿se modifican el promedio, la moda y la mediana?
   b. ¿Qué cambios se pueden hacer en los datos del ejemplo para que cambie la moda? ¿Y para que cambie la mediana?
   c. Expliquen el procedimiento realizado para calcular el promedio a partir de la tabla de frecuencias absolutas.

ApAp

a. La media sí (sería 16,1), la mediana y la moda no se modifican.
b. Para cambiar la moda, debería cambiarse la cantidad de los valores con mayor frecuencia. Para que cambie la mediana, basta con cambiar los valores centrales.
c. Se suman los productos entre cada valor de la variable y su frecuencia; luego, se la divide por la cantidad de individuos.

52. Promedio, moda y mediana

CyRes **4. Lean atentamente y resuelvan.**

En una escuela se registraron las velocidades de los autos que circulaban por la calle en el horario de salida escolar. Los valores en km/h fueron los siguientes: 15, 15, 20, 20, 20, 70, 20, 10, 20, 10, 70.

a. ¿Cuál es la variable y de qué tipo?
"Velocidad de autos que circulan por la calle en horario de salida escolar", cuantitativa.

b. Completen la tabla de frecuencias absolutas.

Velocidad	10	15	20	70
f	2	2	5	2

c. Calculen.

Promedio: 26,36 ; moda: 20 ; mediana: 20

d. Investiguen cuál es la velocidad máxima de circulación frente a una escuela ubicada en una calle.

¿Cuántos vehículos estaban en infracción? A cargo del alumno.

e. Si se considera el promedio, ¿qué se puede decir de los automovilistas que circulaban?

A cargo del alumno.

f. ¿Cuál les parece la medida más representativa de la situación? El promedio.

5. Resuelvan.

Los alumnos de segundo año de una escuela realizaron una encuesta para saber cuántos grupos de WhatsApp activos tiene cada alumno de esa institución. Se tomó al azar a 30 estudiantes y el 10% respondió que tiene 3 grupos de WhatsApp activos, el 20% tiene 4, el 30%, 5 y el 40% tiene 6.

a. Completen la tabla de frecuencias.

b. Calculen el promedio y la moda.

Promedio: 5; moda: 6.

c. Observen la columna de las frecuencias absolutas acumuladas y establezcan cuál es la mediana. Compartan con sus compañeros el método que utilizaron.

La mediana es 5.

Cantidad de grupos de WhatsApp activos	f	fr	fr%	fa
3	3	0,10	10%	3
4	6	0,20	20%	9
5	9	0,30	30%	18
6	12	0,40	40%	30
Total	30	1	100%	30

PenCrit **6. Calculen.**

Se realizaron dos encuestas a dos grupos de personas que viven en un departamento sin patio ni balcón. Se les consultó cuántas macetas tenían en sus viviendas y los resultados fueron los siguientes:

Grupo A: 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 75

Grupo B: 2, 4, 5, 6, 7, 8, 15, 15

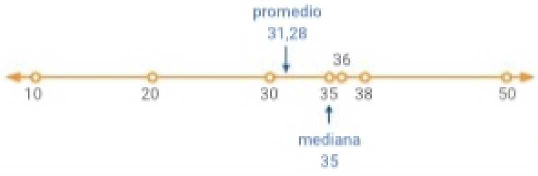
a. Calculen el promedio y la moda de cada grupo. Grupo A: promedio 11; moda 2. Grupo B: promedio 7,75; moda 15.

b. ¿Qué valor es más representativo de cada grupo: el promedio o la moda?

En el grupo A: la moda. En el grupo B: el promedio.

DinámicaMente

Tengan en cuenta los datos volcados en la recta y resuelvan.



a. Modifiquen un valor para que la mediana sea la misma, pero cambie el promedio. Se debe cambiar cualquier valor, menos el central. Así no cambia la mediana pero sí el promedio.

b. Modifiquen dos datos para que el promedio sea el mismo, pero cambie la mediana. Por ejemplo: el 35 y el 36 por el 34 y el 37.

c. Compartan las respuestas con sus compañeros.
A cargo del alumno.

53. Gráficos

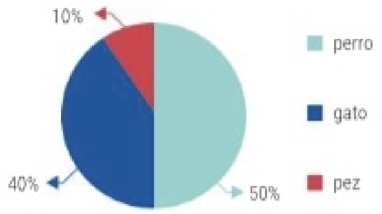
▶ SABERES DINÁMICOS

La información que surge de un estudio estadístico puede ser representada utilizando gráficos. Este recurso visual ayuda a analizar rápidamente una situación.

En una veterinaria se registraron las mascotas que fueron llevadas por los clientes un sábado.

Mascota	Perros	Gatos	Peces
f	5	4	1
fr%	50%	40%	10%

Gráficos circulares: se muestran las frecuencias relativas porcentuales de cada dato.

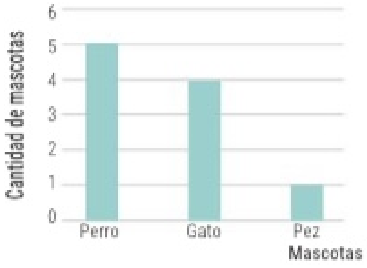


Por ejemplo, para calcular el ángulo central (x) para el dato "gato" se hace:

100% ______ 360°

40% ______ $x = \frac{40\% \cdot 360°}{100\%}$ $x = 144°$

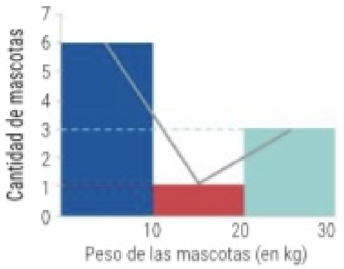
Gráficos de barras: se utilizan para comparar la cantidad de datos para cada valor de la variable. En el gráfico, todos los rectángulos deben tener el mismo ancho, y las alturas coinciden con las frecuencias absolutas de cada dato.



Histograma: se utilizan para representar intervalos de clase. Cuando los intervalos de clase son iguales, cada rectángulo tiene el mismo ancho (1) y su altura es la frecuencia absoluta. A partir de este gráfico se puede crear el polígono de frecuencias uniendo con segmentos los puntos medios de las partes más altas de los rectángulos (también se puede hacer en el gráfico de barras).

En la misma veterinaria se registró el peso de las mascotas que asistieron ese sábado.

Intervalo de peso (kg)	f
[0; 10)	6
[10; 20)	1
[20; 30)	3



Pictogramas: es como un gráfico de barras donde las frecuencias absolutas se representan con dibujos en lugar de barras.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es posible realizar un histograma de una variable cualitativa?
   b. Si se quiere conocer el total de datos de un estudio estadístico, ¿qué gráfico conviene mirar: de barras o circular?
   ApAp c. Escriban una fórmula que sirva para calcular, para cada dato, el ángulo central de un gráfico circular en función de su frecuencia relativa porcentual (fr%).

a. Sí.
b. Gráfico de barras.
c. Ángulo central (para cada dato) = fr% . 360° : 100%

ACTIVIDADES

53. Gráficos

7. **Resuelvan.**

En un local de ropa se registraron las ventas en una semana y fueron las siguientes.

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Cantidad de ventas	20	15	10	5	5	30

a. Realicen un gráfico de barras con el polígono de frecuencias y un pictograma.

b. ¿Cuál fue el total de ventas semanal? 85 ventas.

c. ¿Qué día se vendió más? El sábado.

8. **Lean atentamente y resuelvan.**

Se les preguntó a 20 alumnos de quinto año qué plataforma utilizan para escuchar música. Un alumno utiliza Google Play Music; otro, Deezer; 6, Spotify y el resto dice que usa YouTube.

a. Completen la tabla.

b. ¿Cuál es la moda? La moda es YouTube.

c. Realicen en la carpeta un gráfico circular de la situación. A cargo del alumno.

d. ¿Qué porcentaje no utiliza YouTube? 40%.

Plataforma	fr	fr%	Ángulo central
Google Play Music	1	5%	18°
Deezer	1	5%	18°
Spotify	6	30%	108°
YouTube	12	60%	216°

CyRes 9. **Lean atentamente y resuelvan.**

En un hotel se consultó a los huéspedes la cantidad de minutos que tardaban para ducharse y así decidir si hacían un folleto para concientizar acerca del uso del agua. Los resultados se registraron en la tabla.

Tiempo en la ducha (min)	Cantidad de personas
[0; 5)	16
[5; 10)	8
[10; 15)	6

a. Elaboren un histograma y su polígono de frecuencias.

b. Para tener un menor impacto ambiental, se recomienda que las duchas sean de 5 minutos como máximo. ¿Cuántas personas no cumplen con esta expectativa? ¿Cuál es el porcentaje con respecto al total?

14 personas no lo cumplen, es decir, un 46,67%.

c. Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), 10 minutos de ducha consume 200 litros de agua, el equivalente a 400 botellas de medio litro. Discutan con sus compañeros: ¿qué opinan de esta cifra? ¿Cuántos minutos tardan en bañarse? ¿Por qué es importante el cuidado del agua?
A cargo del alumno.

10. Lean atentamente y resuelvan.

Una empresa de venta de celulares ubicada en San Pedro realizó una encuesta para saber cada cuántos años cambian el celular las personas de ese lugar. Se volcaron los datos en la siguiente tabla.

Años	f	fr	fr%	fa
1	30	0,25	25%	30
2	60	0,50	50%	90
3	6	0,05	5%	96
4	24	0,20	20%	120

a. Completen la tabla.

b. ¿Cuál es la población y cuál es la muestra?
Población: habitantes de San Pedro; muestra: 120 personas.

c. ¿Cuál es la variable y de qué tipo? "Cada cuántos años cambia el celular una persona de San Pedro", es cuantitativa.

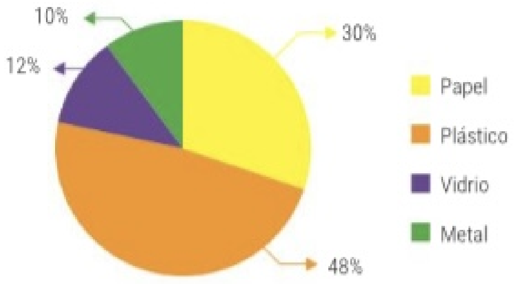
d. ¿Cuántas personas cambian el celular a los 3 años o menos? ¿Qué dato de la tabla brinda esa información?
96 personas. La frecuencia acumulada.

e. Calculen el promedio, la moda y la mediana.
Promedio: 2,2; moda: 2; mediana: 2.

f. Realicen un gráfico de barras con su polígono de frecuencias.
A cargo del alumno.

CyRes **11. Respondan.**

En un centro de reciclado recibieron 50 toneladas de materiales en el mes de marzo. En el gráfico circular se detalla el tipo de material recibido.



a. ¿Cuál es la variable y de qué tipo?
"Tipo de material recibido para reciclar", es cualitativa.

b. ¿Cuántas toneladas de plástico y de vidrio recibieron en marzo?
24 toneladas de plástico y 6 de vidrio.

c. ¿Cuál es la moda?
"Plástico".

d. Investiguen si existe un centro de reciclado por la zona donde viven y la cantidad de materiales que recibe por mes.
A cargo del alumno.

12. Resuelvan.

Se les preguntó a los empleados de una red de electrodomésticos cuántos televisores tenían en sus casas. Las respuestas fueron:

2, 3, 2, 1, 2, 4, 0, 3, 1, 2, 2, 3

a. Completen la tabla.

Cantidad de televisores	f	fr	fr%	fa
0	1	0,08	8%	1
1	2	0,17	17%	3
2	5	0,42	42%	8
3	3	0,25	25%	11
4	1	0,08	8%	12

b. ¿Cuál es la variable y de qué tipo? "Cantidad de televisores que los empleados tienen en sus casas", es cuantitativa.

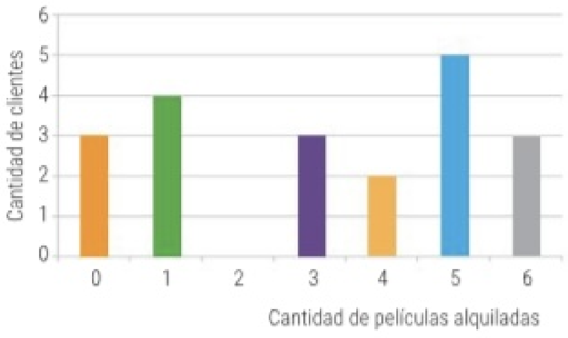
c. Si se quiere regalar un televisor a los empleados que tienen uno o menos, ¿qué porcentaje de empleados lo recibirá?
25%.

d. Calculen el promedio, la moda y la mediana.
Promedio: 2,08; moda: 2; mediana: 2.

e. Realicen un pictograma.
A cargo del alumno.

13. Observen el gráfico de barras y respondan.

Se realizó una encuesta a clientes de Netflix para saber cuántas películas alquilaron por esta plataforma en el último mes. Los resultados fueron volcados en el siguiente gráfico de barras.



a. ¿Cuál es la variable y de qué tipo?
"Cantidad de películas alquiladas en Netflix", es cuantitativa.

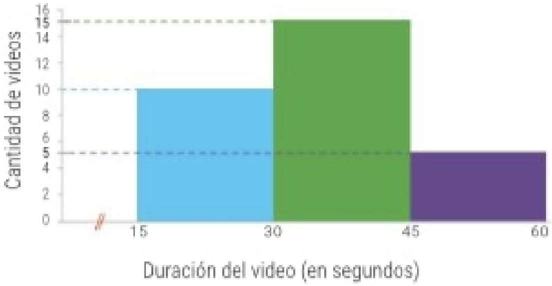
b. ¿Cuántos clientes fueron encuestados?
20 clientes.

c. Calculen el promedio, la moda y la mediana.
Promedio: 3,2; moda: 5; mediana: 2,5.

d. Si el costo por película es de 3 euros, ¿cuánto dinero en total recaudó Netflix con estos clientes?
192 euros.

14. **Observen el histograma y respondan.**

Andrea registró la duración de los videos de TikTok que vio en un día. Con esos datos realizó el siguiente gráfico.



a. ¿Cuál es la variable y de qué tipo?
"Duración del video de Tik Tok", es cuantitativa.

b. ¿Cuántos videos en total vio Andrea ese día?
En total vio 30 videos.

c. ¿Cuál es el porcentaje de videos vistos que duran menos de 45 segundos?
83,3% de los videos duran menos de 45 segundos.

d. Dibujen el polígono de frecuencias.
A cargo del alumno.

15. **Lean atentamente y resuelvan.**

En una escuela con 400 alumnos se quiere saber cuánta agua beben los estudiantes dentro de la institución. Se eligieron 40 alumnos al azar y se registró su consumo (en litros).

0,4	0,9	0,6	1	0,5	0,7	1	0,4
0,3	0,5	0,2	0,4	0,8	0,5	1	0,3
1	0,6	1,2	0,7	1,1	0,4	0,2	1
0,3	0,5	0,5	0,5	1	0,3	0,5	0,4
1,1	0,8	0,7	0,6	0,3	0,7	0,8	1,2

a. Establezcan los intervalos de clase y realicen una tabla de frecuencias.
A cargo del alumno.

b. ¿Cuál es la población y cuál es la muestra?
Población: 400 alumnos de la institución; muestra: 40 alumnos.

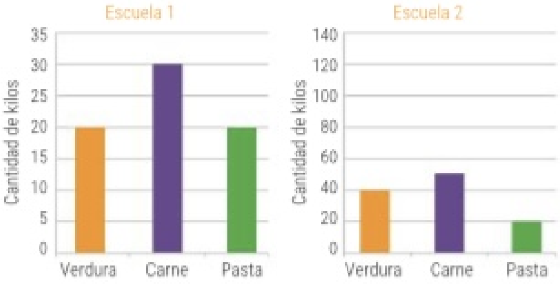
c. ¿Cuál es la variable y de qué tipo?
"Cantidad de litros que un estudiante bebe en la escuela", es cuantitativa.

d. ¿Cuántos alumnos toman menos de un litro? ¿Cuál es el porcentaje?
30 alumnos. El 75%.

e. Realicen un histograma y el polígono de frecuencias.
A cargo del alumno.

16. **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen todas las respuestas.**

En dos escuelas se registraron cuántos kilos diarios de verdura, carne y pasta son comprados para sus comedores escolares. Los resultados fueron volcados en estos gráficos.



a. En la escuela 1 se consume más verdura que en la escuela 2. F

b. La escuela 1 compra más kilos en total que la escuela 2. F

c. El consumo de pastas en ambos comedores es el mismo. V

d. El porcentaje de consumo de pastas en la escuela 1 es de casi el 29%. V

e. El porcentaje de consumo de pastas en la escuela 2 es igual que en la escuela 1. F

17. **Observen las notas de los cursos y resuelvan.** PenCrit

Curso 3.° 1.ra	
Notas	Cantidad de alumnos
5	0
6	5
7	5
8	0
9	1

Curso 3.° 2.da	
Notas	Cantidad de alumnos
5	5
6	0
7	0
8	2
9	4

a. ¿Cuántos alumnos tiene cada curso?

b. Calculen el promedio, la mediana y la moda de ambos cursos.

c. Si se aprueba con 6, ¿cuál de los cursos piensan que tuvo mejor rendimiento académico? Compartan su opinión con sus compañeros.

a. 3.° 1.ra: 11; 3.° 2.da: 11.
b. 3.° 1.ra: promedio: 6,73; moda: 6 y 7; mediana: 7.
3.° 2.da: promedio: 7; moda: 5; mediana: 8.
c. A cargo del alumno.

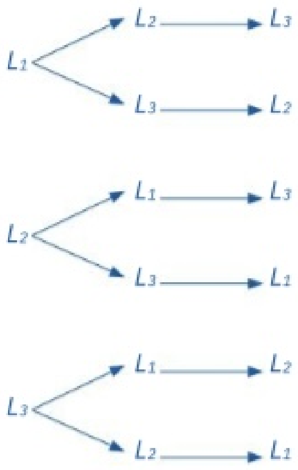
54. Permutaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

El cálculo combinatorio establece métodos de conteo que ayudan a formar y contabilizar las distintas agrupaciones que se pueden realizar con los elementos de un conjunto.
Cuando se tiene en cuenta el orden de los elementos de estas agrupaciones, se las llama **permutaciones**.

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar 3 libros en un estante?

Los elementos de este conjunto son: libro 1 (L_1), libro 2 (L_2) y libro 3 (L_3), y las posibles agrupaciones se pueden representar con un diagrama de árbol.



En el primer lugar del estante existen 3 posibles libros para colocar, en el segundo lugar solo dos y en el tercero solo uno. Para contabilizar la cantidad total de permutaciones, basta con multiplicar la cantidad de posibilidades de cada lugar, es decir: $3 . 2 . 1 = 6$.
Son 6 las maneras diferentes en que se pueden ordenar 3 libros en un estante.

Cuando se multiplica un número natural **n** por cada uno de los anteriores hasta llegar al número 1, se lo denomina **factorial de n** y se simboliza **n!**

$$4! = 4 . 3 . 2 . 1 \qquad 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$$

En el problema anterior el cálculo realizado es $3! = 3 . 2 . 1$

Por convención $0! = 1$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fac* y miren el video donde se explica un problema de permutaciones, la definición de factorial de un número y cómo se resuelve con la calculadora.

* Enlace acortado de https://youtu.be/-pxr6cxwmtQ

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Con 2 remeras y 3 pantalones se quiere saber cuántas combinaciones de remera y pantalón se pueden hacer. ¿Importa el orden en el que se nombre a las prendas? ¿Es una permutación?
   b. Se quiere saber cuántos números diferentes se pueden formar con las cifras 3, 6 y 7. ¿Importa el orden en el que se colocan las cifras? ¿Es una permutación?
   c. Den otro ejemplo de una situación en el que se deben calcular distintas agrupaciones e importe el orden de los elementos. ApAp

a. Se pueden hacer 6 combinaciones, no importa el orden así que no es una permutación.
b. Sí, importa el orden, es una permutación.
c. Por ejemplo: se quieren ordenar en una carpeta las 7 materias semanales de un curso.

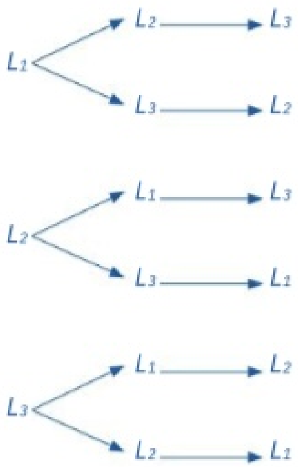
54. Permutaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

El cálculo combinatorio establece métodos de conteo que ayudan a formar y contabilizar las distintas agrupaciones que se pueden realizar con los elementos de un conjunto.
Cuando se tiene en cuenta el orden de los elementos de estas agrupaciones, se las llama **permutaciones**.

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar 3 libros en un estante?

Los elementos de este conjunto son: libro 1 (L_1), libro 2 (L_2) y libro 3 (L_3), y las posibles agrupaciones se pueden representar con un diagrama de árbol.



En el primer lugar del estante existen 3 posibles libros para colocar, en el segundo lugar solo dos y en el tercero solo uno. Para contabilizar la cantidad total de permutaciones, basta con multiplicar la cantidad de posibilidades de cada lugar, es decir: 3 . 2 . 1 = 6.
Son 6 las maneras diferentes en que se pueden ordenar 3 libros en un estante.

Cuando se multiplica un número natural **n** por cada uno de los anteriores hasta llegar al número 1, se lo denomina **factorial de n** y se simboliza **n!**

$$4! = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \qquad 6! = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

En el problema anterior el cálculo realizado es 3! = 3 . 2 . 1

Por convención 0! = 1

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/fac* y miren el video donde se explica un problema de permutaciones, la definición de factorial de un número y cómo se resuelve con la calculadora.

* Enlace acortado de https://youtu.be/-pxr6cxwmtQ

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Con 2 remeras y 3 pantalones se quiere saber cuántas combinaciones de remera y pantalón se pueden hacer. ¿Importa el orden en el que se nombre a las prendas? ¿Es una permutación?
   b. Se quiere saber cuántos números diferentes se pueden formar con las cifras 3, 6 y 7. ¿Importa el orden en el que se colocan las cifras? ¿Es una permutación?
   c. Den otro ejemplo de una situación en el que se deben calcular distintas agrupaciones e importe el orden de los elementos.

ApAp

a. Se pueden hacer 6 combinaciones, no importa el orden así que no es una permutación.
b. Sí, importa el orden, es una permutación.
c. Por ejemplo: se quieren ordenar en una carpeta las 7 materias semanales de un curso.

54. Permutaciones

18. Lean atentamente las siguientes situaciones e identifiquen cuáles corresponden a permutaciones. En caso que lo sean, realicen el cálculo correspondiente.

a. El menú de un restaurante ofrece tres entradas, dos platos principales y tres postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir? Permutación, 18 menús diferentes (3 . 2 . 3 = 18).

b. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden formar cinco alumnos en una fila?

Permutación, 120 formas diferentes (5! = 120).

c. Se quiere pintar una bandera con tres franjas de colores: blanco, negro y azul. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar la bandera sin repetir color? Permutación, 6 formas diferentes (3! = 6).

d. Juan debe elegir dos regalos distintos entre estas opciones: perfume, reloj, aros y zapatillas. ¿De cuántas formas distintas puede hacer su elección? No es una permutación.

19. Calculen.

a. $7! =$ 5 040

b. $1! =$ 1

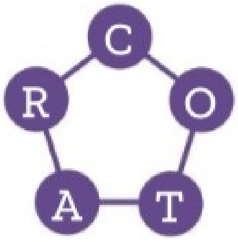
c. $0! =$ 1

d. $6! - 5! =$ 720 − 120 = 600

e. $\frac{6!}{5!} =$ (6 . 5!)/5! = 6

f. $\frac{3!}{4!} \cdot 4 =$ 3!/(4 . 3!) . 4 = 1

20. Observen el diagrama que ofrece una app para formar combinaciones de letras y respondan.



a. ¿Cuántas combinaciones se pueden formar con esas cinco letras, sin repetirlas?

5! Es decir, 120 combinaciones.

b. Sin usar la letra R, ¿cuántas combinaciones se pueden formar con las cuatro letras restantes, sin repetirlas? ¿Es lo mismo no usar la R que no usar la T?

Se pueden formar 4! Combinaciones, es decir, 24. Es lo mismo no usar la R que no usar la T.

21. Respondan.

a. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los números 4, 5 y 6? 6 números (3!).

b. ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con los dígitos pares? 4 . 4! = 96

c. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden formar con los dígitos primos? ¿Cuál es el mayor número que se puede formar? 4! = 24. el mayor es 7 532.

22. Lean atentamente y respondan.

En una fiesta deben actuar tres humoristas (A, B y C), dos grupos de baile (D y E) y un cantante (F).

a. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las actuaciones?

6! = 720

b. Si el cantante tiene que actuar primero, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las actuaciones?

1 . 5! = 120

c. Si el cantante tiene que actuar primero y el humorista A, último, ¿de cuántas formas diferentes se pueden ordenar las actuaciones? 1 . 4! . 1 = 24

55. Probabilidad

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **experimento** es **aleatorio** si no se puede saber de forma anticipada cuál será el resultado, sino que depende del azar. Por ejemplo: cuando se lanza una moneda al aire no se puede saber si caerá en cara o ceca, por lo tanto, "lanzar una moneda" es un experimento aleatorio.
Se llama **suceso** a cada uno de los posibles resultados del experimento. En el experimento "lanzar una moneda", un suceso sería que salga "cara".
El conjunto de todos los sucesos del experimento se llama **espacio muestral**. Para determinarlo, se puede realizar un diagrama de árbol. El espacio muestral del experimento "lanzar una moneda" es: cara, ceca.

Si se lanza una moneda dos veces, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener?
Experimento: lanzar una moneda dos veces.
Espacio muestral: (cara, cara); (cara, ceca); (ceca, cara); (ceca,ceca)

Utilizando un diagrama de árbol:

Se pueden obtener cuatro resultados distintos.

De cada suceso de un experimento aleatorio se puede calcular la **probabilidad** de que este ocurra.
El cálculo es el siguiente:

$$\text{Probabilidad de un suceso (P)} = \frac{\text{cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de casos posibles}}$$

El valor de la probabilidad es siempre un número entre 0 y 1, incluyendo el 0 y 1.
Para hallar la probabilidad de que salgan dos caras:

$P = \frac{1}{4}$

← El caso favorable es solo 1: (cara, cara)

← Los casos posibles son los 4 elementos del espacio muestral.

La probabilidad de que salga primero una cara y luego una ceca también es de $\frac{1}{4}$.

Los sucesos que tienen la misma probabilidad de ocurrir se llaman **sucesos equiprobables**.

Áreas dinámicas [Matemática y Biología]

En Biología se utilizan las probabilidades para predecir las frecuencias de los eventos de fertilización. Por ejemplo, se considera un cruzamiento entre dos individuos heterocigotos (Aa). **¿Cuál es la probabilidad de obtener un individuo aa en la siguiente generación?** La única manera de obtener un individuo aa es si la madre contribuye un gameto a y el padre contribuye un gameto a; la probabilidad de un descendiente aa es de $\frac{1}{4}$.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. En el experimento aleatorio "lanzar un dado", ¿cuál es la probabilidad de que salga un 12? ¿Cómo llamarían a este suceso? La probabilidad es 0. El suceso es "imposible".
   b. Si para hallar la probabilidad de un suceso, la cantidad de casos favorables es igual a la cantidad de casos posibles, ¿cuál es el resultado de esa probabilidad? ¿Cómo llamarían a este suceso? La probabilidad es 1. El suceso es "seguro".
   ApAp c. Propongan un ejemplo de experimento aleatorio. Por ejemplo, sacar una carta al azar de un mazo de cartas.

55. Probabilidad

23. Analicen si los siguientes experimentos son aleatorios y completen con Sí o No, según corresponda.

a. Lanzar la bola en una ruleta. Sí

b. Sumar los números que hay en la ruleta. No

c. Contar la cantidad de bolillas de un bolillero. No

d. Sacar una bolilla de un bolillero. Sí

24. Escriban el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

a. Sacar un papel de una caja con cinco papeles rojos y dos verdes: {rojo, verde}

b. Arrojar primero un dado y luego una moneda: {(1; cara); (2; cara); (3; cara); (4; cara); (5; cara); (6; cara), (1; ceca); (2; ceca); (3; ceca); (4; ceca); (5; ceca); (6; ceca)}

c. Arrojar primero un dado azul y luego un dado blanco: {(1A; 1B); (1A; 2B); (1A; 3B); (1A; 4B); (1A; 5B); (1A; 6B); (2A; 1B); (2A; 2B); (2A; 3B); (2A; 4B); (2A; 5B); (2A; 6B); (3A; 1B); (3A; 2B); (3A; 3B); (3A; 4B); (3A; 5B); (3A; 6B); (4A; 1B); (4A; 2B); (4A; 3B); (4A; 4B); (4A; 5B); (4A; 6B); (5A; 1B); (5A; 2B); (5A; 3B); (5A; 4B); (5A; 5B); (5A; 6B); (6A; 1B); (6A; 2B); (6A; 3B); (6A; 4B); (6A; 5B); (6A; 6B)}

25. Tengan en cuenta los experimentos aleatorios de la actividad anterior y marquen con una X las afirmaciones correctas. Corrijan los casos incorrectos.

a. La probabilidad de sacar un papel rojo es de $\frac{1}{2}$. ☐
La probabilidad es 5/7.

b. "Sacar un papel amarillo" es un suceso imposible; por lo tanto, su probabilidad es 1. ☐
La probabilidad es 0.

c. La probabilidad de sacar un número par y una cara es de $\frac{1}{4}$. X

d. "Sacar el mismo número en los dos dados" y "sacar 2 en el dado azul" son sucesos equiprobables. X

26. Observen las bolillas que tiene un bolillero y resuelvan.

• Se extrae una bolilla. Calculen las siguientes probabilidades:

a. Que sea celeste. $\frac{3}{8}$

b. Que tenga un número mayor o igual a 5. $\frac{1}{2}$

c. Que tenga el número 10. 0

d. Que su número sea menor a 9. 1

• Se extrae otra bolilla (sin devolver la sacada anteriormente). Calculen las siguientes probabilidades.

e. Que la primera sea un 4 y la segunda, un 7. $\frac{1}{56}$

f. Que las dos sean violetas. $\frac{1}{28}$

27. Escriban un suceso que tenga la probabilidad indicada en cada caso.

Se saca una carta de un mazo de 50 naipes españoles.

a. $\frac{1}{50}$: Sacar un as de espada (por ejemplo)

b. $\frac{2}{25}$: Sacar un as (por ejemplo)

c. 0: Sacar una carta con valor 13.

d. $\frac{6}{25}$: Sacar una carta de espada (por ejemplo)

DinámicaMente

a. Se forma un grupo de cartas con las figuras de un mazo de naipes españoles (reyes, sotas y caballos). ¿Cuántos naipes hay en ese grupo?

b. Si se forma un mazo tomando "n" cartas del grupo de figuras (pueden ser todas) y la probabilidad de extraer un rey de ese mazo es $\frac{1}{3}$, ¿cuántas cartas puede tener el mazo? Escriban todas las posibilidades e indiquen cuántos reyes habría en cada caso.

a. 12

b. 3 cartas: 1 rey; 6 cartas: 2 reyes; 9 cartas: 3 reyes; 12 cartas: 4 reyes.

Integración final

28. Tengan en cuenta las letras de la palabra ARCO y resuelvan.

a. ¿Cuántas combinaciones de cuatro letras distintas se pueden formar? ¿Y que comiencen con la letra R? ¿Y que terminen con la letra A?

24; 6; 6.

b. Se escriben las letras en cuatro papeles y se ponen dentro de una caja. Si se saca una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una vocal? ¿Y que sea una consonante? ¿Cómo son estos dos sucesos?

1/2; 1/2. Sucesos equiprobables.

29. Para ingresar la contraseña en un dispositivo se deben pulsar en un orden estos puntos (sin repetir).

a. ¿Cuántas contraseñas se pueden formar?

120

b. ¿Cuántas contraseñas que empiecen con el punto celeste se pueden formar?

24

c. Si una persona marca una contraseña al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea la contraseña que habilite el dispositivo?

1/120

d. Si para hacer más segura la contraseña se le agrega otro punto, ¿cuántas contraseñas se pueden formar? ¿Es más seguro así? ¿Por qué?

720. Sí, la probabilidad de acertar es menor (1/720).

30. Observen la tabla y resuelvan.

Una orquesta escolar está formada por alumnos de diferentes edades, como muestra la siguente tabla.

Años	12	13	14
Cantidad de alumnos	3	1	4

a. En una presentación se debe ordenar a los alumnos en una fila con 8 asientos. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar?

8! = 40 320

b. Si ya hay dos alumnos sentados en los dos primeros asientos, ¿de cuántas maneras diferentes se puede ordenar al resto de los alumnos?

6! = 720

c. Si se elige al azar uno de los alumnos de la orquesta, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 12 años? ¿Y de que tenga al menos 13 años?

3/8; 5/8.

d. Calculen el promedio, la mediana y la moda de las edades de los alumnos.

Promedio: 13,125; mediana: 13,5; moda: 14.

31. Lean atentamente y respondan.

En una caja hay una cierta cantidad de cubos de colores. Si se extrae un cubo al azar, la probabilidad que sea azul es $\frac{1}{2}$, que sea amarillo, $\frac{1}{4}$, que sea rojo, $\frac{1}{8}$ y que sea naranja, $\frac{1}{8}$.

a. Si hay 8 cubos azules, ¿cuántos cubos hay de cada color?

8 azules, 4 amarillos, 2 rojos y 2 naranjas.

b. ¿Cuál es la suma de las probabilidades de sacar cada color?

1.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga un cubo de color rojo?

7/8

d. Escriban un suceso cuya probabilidad sea $\frac{3}{4}$.

"Sacar un cubo azul o uno amarillo".

32. Resuelvan.

Ciro fue a un programa de televisión para participar en dos juegos: "La rueda de la fortuna" y "El peso exacto".

En "La rueda de la fortuna", Ciro debe hacer girar una vez la rueda.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el premio mayor? ¿Y de que gane el premio menor?

1/18; 1/18.

b. ¿Cuál es el suceso que tiene mayor probabilidad de ocurrir? ¿Cuál es su probabilidad?

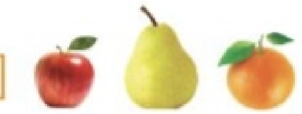
"Ganar 500"; 1/6.

c. ¿Cuál es el suceso cuya probabilidad es $\frac{1}{9}$?

"Ganar 1 000".

En "El peso exacto", Ciro debe colocar tres carteles en las frutas correspondientes, según su peso.

198 g | 210 g | 208 g



d. ¿De cuántas formas diferentes puede colocar Ciro los tres carteles en las frutas?

6

e. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Ciro de ganar el juego, si no conoce los pesos de las frutas?

1/6

f. ¿Cuál es la probabilidad de que solo acierte el peso de la manzana?

1/6

33. **Resuelvan.**

Se tiene una moneda de $1, una de $2 y una de $3.

a. ¿De cuántas formas se pueden ordenar?
6

b. Se arrojan las tres monedas. Realicen un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral. $1ca-$2ca-$3ca; $1ca-$2ca-$3ce; $1ca-$2ce-$3ca; $1ca-$2ce-$3ce; $1ce-$2ca-$3ca; $1ce-$2ca-$3ce; $1ce-$2ce-$3ca; $1ce-$2ce-$3ce.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan las tres monedas con cara? ¿Y las tres con ceca? ¿Cómo son estos sucesos?
1/8; 1/8. Son equiprobables.

d. Escriban un suceso cuya probabilidad sea $\frac{3}{8}$.
"Sacar solo dos caras en las monedas".

34. **Respondan.**

Con los números 2, 5, 6 y 9:

a. ¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar?
24.

b. ¿Cuál es el número mayor que se puede formar? ¿Y el menor?
9 652; 2 569.

c. ¿Cuántos números que empiecen con 9 se pueden formar?
6

d. ¿Cuántos números pares se pueden formar?
12

Se colocan en una bolsa todos los números de cuatro cifras diferentes que se pueden formar.

e. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar el número 5 629?
1/24

f. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número impar?
1/2

35. **Lean atentamente y respondan.**

Martina quiere formar banderines con 5 franjas de diferentes colores. Para ello, va a usar cintas de color rojo, verde, azul, blanco y negro.

a. ¿Cuántas banderas distintas puede formar con esos colores?
120

b. Si la cantidad de cintas que tenía le alcanzó para formar todas las banderas distintas y le sobraron solo 2 cintas, ¿cuántas cintas tenía?
602

c. Si se toma al azar uno de los banderines, ¿cuál es la probabilidad de que el orden de colores sea rojo, verde, azul, negro y blanco?
1/120

d. Si se toma al azar uno de los banderines, ¿cuál es la probabilidad de que el primer color sea verde?
1/5

36. **Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.**

Se lanzan dos dados:

a. La probabilidad de que salgan dos números iguales es $\frac{1}{6}$. **V**
Hay 6/36.

b. La probabilidad de que salga 2 en ambos dados es $\frac{2}{36}$. **F**
Hay 1/36.

c. Los sucesos: "que salga 2 en ambos dados" y "que salga 3 en ambos dados" son sucesos equiprobables. **V**
Tienen la misma probabilidad.

d. La probabilidad de que en ambos dados salgan números menores a 10 es 0. **F**
Es 1.

37. **Lean atentamente y respondan.** PenCrit

Los alumnos de segundo año van a sortear una entrada para el recital escolar entre los veinte compañeros del curso. Pedro dice que en vez de colocar un papel por alumno, es mejor poner dos porque de esa forma todos tienen más probabilidad de ganar. ¿Es cierto lo que dice Pedro? ¿Por qué?
No, es lo mismo 2/40 que 1/20.

38. **Resuelvan.**

Cuatro amigos, Gonzalo, Martín, Matías y Lautaro, juegan al ludo usando una app.

a. Para elegir quién comienza, colocan sus nombres en una bolsa y sacan uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga "Lautaro"?
3/4

b. ¿De cuántas formas diferentes podrían ordenarse para jugar?
24

c. Si a Gonzalo le corresponde jugar primero, ¿de cuántas formas diferentes podrían ordenarse el resto de los amigos?
6

39. **Lean atentamente y resuelvan.**

Benjamín debe leer cuatro poemas y dos poesías en un café literario organizado en la escuela.

a. ¿De cuántas formas diferentes puede ordenar las lecturas?
720

b. Si decidió leer primero las poesías y también su orden, ¿de cuántas formas puede leer los poemas?
48

c. Si prefiere ordenar las lecturas al azar colocando los títulos en una caja y sacando uno sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que la primera lectura sea un poema? ¿Y de que sea una poesía?
2/3; 1/3.

Organización de los contenidos NAP (Núcleos de Aprendizajes Prioritarios)

Organización de los capítulos y contenidos del libro	NAP
Capítulo 1: NÚMEROS ENTEROS 1. Números naturales. Propiedad distributiva. 2. Operaciones combinadas. 3. Divisibilidad. 4. Números enteros. Orden y representación. 5. Adición y sustracción. Supresión de paréntesis y sumas algebraicas. 6. Multiplicación y división. 7. Operaciones combinadas con números enteros. 8. Potenciación y sus propiedades. 9. Radicación y sus propiedades. 10. Operaciones combinadas con potencias y raíces.	**En relación con el número y las operaciones** El reconocimiento y uso de los números racionales en situaciones problemáticas que requieran: • interpretar, registrar, comunicar y comparar números enteros en diferentes contextos: como número relativo (temperaturas, nivel del mar) a partir de la resta de dos números naturales; • comparar números enteros y hallar distancias entre ellos, representándolos en la recta numérica; El reconocimiento y uso de las operaciones entre números racionales en sus distintas expresiones y la explicación de sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran: • interpretar modelos que den significado a la suma, resta, multiplicación, división y potenciación en Z; • analizar las operaciones en Z y sus propiedades como extensión de las elaboradas en N; • usar la jerarquía y las propiedades de las operaciones en la producción e interpretación de cálculos; • explorar y enunciar propiedades ligadas a la divisibilidad en N. **En relación con el álgebra y las funciones** El uso de ecuaciones y otras expresiones algebraicas en situaciones problemáticas que requieran: • producir y analizar afirmaciones sobre propiedades de las operaciones o criterios de divisibilidad avanzando desde su expresión simbólica, y argumentar sobre su validez.
Capítulo 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES EN Z 11. Lenguaje simbólico. Regularidades. 12. Expresiones algebraicas. 13. Cuadrado y cubo del binomio. 14. Ecuaciones. 15. Ecuaciones con potenciación y radicación. 16. Problemas con ecuaciones. 17. Inecuaciones.	**En relación con el álgebra y las funciones** El uso de ecuaciones y otras expresiones algebraicas en situaciones problemáticas que requieran: • transformar expresiones algebraicas obteniendo expresiones equivalentes que permitan reconocer relaciones no identificadas fácilmente en la expresión original, usando diferentes propiedades al resolver ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$; • usar ecuaciones lineales con una variable como expresión de una condición sobre un conjunto de números y analizar su conjunto solución.

Capítulo 3: NÚMEROS RACIONALES 18. Los números racionales. 19. Aproximación. Notación científica. 20. Adición y sustracción. 21. Multiplicación y división. 22. Operaciones combinadas I. 23. Potenciación y radicación. Propiedades. 24. Operaciones combinadas II. 25. Ecuaciones. 26. Problemas con ecuaciones.	**En relación con el número y las operaciones** El reconocimiento y uso de los números racionales en situaciones problemáticas que requieran: · interpretar el número racional como cociente; · usar diferentes representaciones de un número racional argumentando sobre su equivalencia y eligiendo la representación más adecuada en función del problema a resolver; · analizar diferencias y similitudes entre las propiedades de los números enteros y los racionales; · usar la potenciación (con exponente entero) y la radiación en Q y analizar las propiedades de las mismas; · usar y analizar estrategias de cálculo con números racionales; · usar la jerarquía y las propiedades de las operaciones en la producción e interpretación de cálculos. **En relación con el álgebra y las funciones** El uso de ecuaciones y otras expresiones algebraicas en situaciones problemáticas que requieran: · transformar expresiones algebraicas obteniendo expresiones equivalentes que permitan reconocer relaciones no identificadas fácilmente en la expresión original, usando diferentes propiedades al resolver ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$; · usar ecuaciones lineales con una variable como expresión de una condición sobre un conjunto de números y analizar su conjunto solución.
Capítulo 4: FUNCIONES 27. Representaciones en el plano. 28. Funciones: tablas y gráficos. 29. Función lineal. 30. Función de proporcionalidad directa. 31. Función de proporcionalidad inversa.	**En relación con el álgebra y las funciones** El uso de relaciones entre variables en situaciones problemáticas que requieran: · interpretar relaciones entre variables en tablas, gráficos y fórmulas en diversos contextos; · modelizar variaciones uniformes y expresarlas eligiendo la representación más adecuada a la situación; · explicitar y analizar propiedades de las funciones de proporcionalidad directa; · producir fórmulas para representar regularidades numéricas en N y analizar sus equivalencias.
Capítulo 5: RECTAS Y ÁNGULOS 32. Elementos fundamentales de la geometría. Circunferencia y círculo. 33. Posiciones relativas de dos rectas. Mediatriz. 34. Ángulos. Sistema sexagesimal. 35. Ángulos congruentes. Bisectriz. 36. Clasificación de ángulos. 37. Ángulos determinados por dos rectas y una transversal.	**En relación con la geometría y la medida** El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran: · determinar puntos que cumplan condiciones referidas a distancias y construir circunferencias, mediatrices y bisectrices como lugares geométricos; · formular conjeturas sobre las relaciones entre distintos tipos de ángulos a partir de las propiedades del paralelogramo y producir argumentos que permitan validarlas (opuestos por el vértice, adyacentes y los determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal).

Capítulo 6: FIGURAS PLANAS 38. Triángulos. 39. Propiedades de los triángulos. 40. Puntos notables del triángulo. 41. Criterios de congruencia. 42. Construcción de triángulos. 43. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras. 44. Paralelogramos. Construcciones. 45. Trapecios y romboides. 46. Perímetro y área de figuras planas.	En relación con la geometría y la medida El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran: • explorar diferentes construcciones de triángulos y argumentar sobre condiciones necesarias y suficientes para su congruencia; • analizar afirmaciones acerca de las propiedades de las figuras y argumentar sobre su validez, reconociendo los límites de las pruebas empíricas; • analizar las relaciones entre lados de triángulos cuyas medidas son ternas pitagóricas e interpretar algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras basadas en equivalencia de áreas. La comprensión del proceso de medir y calcular medidas en situaciones problemáticas que requieran: • estimar y calcular cantidades, eligiendo la unidad y la forma de expresarlas que resulte más conveniente en función de la situación y de la precisión requerida, y reconociendo la inexactitud de toda medición.
Capítulo 7: CUERPOS 47. Clasificación de los cuerpos. 48. Áreas lateral y total de cuerpos. 49. Volumen de los cuerpos. 50. Unidades de capacidad y de masa.	En relación con la geometría y la medida La comprensión del proceso de medir y calcular cantidades en situaciones problemáticas que requieran: • explorar las relaciones entre cuerpos con igual área lateral y distinto volumen o con el mismo volumen y distintas áreas laterales.
Capítulo 8: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 51. Población y muestra. Organización de la información. 52. Promedio, moda y mediana. 53. Gráficos. 54. Permutaciones. 55. Probabilidad.	En relación con la probabilidad y la estadística La interpretación y elaboración de información estadística en situaciones problemáticas que requieran: • organizar conjuntos de datos discretos y acotados para estudiar un fenómeno, comunicar información y/o tomar decisiones, analizando el proceso de relevamiento de los mismos; • identificar diferentes variables (cualitativas y cuantitativas), organizar los datos y construir gráficos adecuados a la información a describir; • interpretar el significado de la media y el modo para describir los datos en estudio. El reconocimiento y uso de la probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas que requieran: • comparar las probabilidades de diferentes sucesos incluyendo casos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas; • determinar la frecuencia relativa de un suceso mediante experimentación real o simulada y compararla con la probabilidad teórica.